Le rôle médiateur de la verbalisation entre les aspects figuraux et théoriques dans un problème de démonstration en géométrie plane

Elisabetta Robotti

UNIVERSITÉ JOSEPH FOURIER-GRENOBLE I
Science, Technologie, Médicine

UNIVERSITÉ DE GENOVA
Siège administratif du Doctorat en Mathématiques du Consortium des Universités de Genova, de Torino et du Politecnico di Torino

THÈSE EN CO-TUTELLE
Pour obtenir le grade de
DOCTEUR DE UNIVERSITÉ JOSEPH FOURIER-GRENOBLE I
UFR : **Informatique – Mathématiques Appliquées**
SPÉCIALITÉ : Didactique des Mathématiques

et

DOTTORE DI RICERCA IN MATEMATICA
DELL' UNIVERSITÀ di GENOVA
Facoltà di **Matematica**

Elisabetta Robotti
Le 19 juin 2002

LE RÔLE MÉDIATEUR DE LA VERBALISATION ENTRE LES ASPECTS FIGURAUX ET THÉORIQUES DANS LE PROCESSUS DE DÉMONSTRATION D'UN PROBLÈME DE GÉOMÉTRIE PLANE

Directeurs de thèse :
Colette LABORDE
Maria Alessandra MARIOTTI

COMPOSITION DU JURY

Rapporteurs :	Paolo BOERO – Université de Genova
	Bernard PARZYSZ – IUFM de Orléans
Directeurs de thèse :	Colette LABORDE – IUFM de Grenoble
	Maria Alessandra MARIOTTI – Université de Pisa
Examinateurs :	Mariolina BARTOLINI BUSSI – Université de Modena
	Annie BESSOT – Università Joseph Fourier

What we call the beginning is often the end
And to make an end is to make a beginning,
The end is where we start from
T. S. Eliot

Table de matière

Introduction

Lorsque un jour, à l'age de 15 ans, je me suis rendue compte que pour élaborer la résolution d'un problème de géométrie, il fallait se poser « les bonnes questions », une certaine « curiosité » sur l'usage du langage comme aide à l'avancement de la résolution a commencé à se manifester.

Jusqu'à présent peu développé dans la didactiques de mathématiques, l'analyse du rôle du langage naturel lors du processus de résolution d'un problème mathématique constitue le point de départ de notre recherche. Le domaine des mathématiques, qui est l'objet de notre étude, est restreint au domaine de la géométrie plane. Nous chercherons à dégager l'analyse du rôle du langage lors des processus de résolution des problèmes de géométrie plane.
Or, en géométrie, on fait en permanence appel à trois registres : le registre figuratif, le registre du langage naturel et le registre du langage symbolique. C. Laborde (1982) a déjà montré l'importance de l'interaction entre les deux registres de la langue, mais notre point de vue se centre spécialement sur la relation entre le registre figuratif et le registre du langage naturel. Il s'agira alors de reconnaître et analyser les multiples allers et retour entre le référent graphique (dessin) et le référent théorique (objet théorique) dans le discours produit par les élèves en train de résoudre un problème de géométrie.
L'**hypothèse de recherche** sur laquelle notre étude s'appuie est que le langage peut jouer le rôle d'outil pour l'avancement du processus de résolution d'un problème de géométrie plane plus précisément un problème de démonstration.
En nous appuyant sur les notions d'appréhension opératoire, perceptive et discursive du dessin issues de la théorie de Duval (1994), l'hypothèse de recherche peut être reformulée en d'autres termes : le langage naturel peut jouer le rôle d'outil pour l'avancement de la résolution d'un problème de géométrie plane lors des allers et retours entre appréhension opératoire du dessin et référent théorique. On sait que le dessin est une source d'idées pour la démonstration mais que la démonstration ne saurait y faire appel puisqu'elle ne doit s'appuyer que sur des référents théoriques. Les allers et retours entre dessin et référent théorique n'y sont donc pas simples à accomplir puisqu'ils demandent une réinterprétation des objets en jeu dans le problème.

Il s'agira d'analyser un discours produit par deux élèves dans une situation de communication sociale lors de la résolution d'un problème de démonstration en géométrie plane.
L'**objet de notre** recherche portera donc sur le langage naturel en tant que registre de communication et **l'objectif** sera l'analyse fonctionnelle de l'acte de communication en langage naturel en tant que médiateur dans la relation entre appréhension opératoire du dessin et référent théorique.
L'analyse fonctionnelle du langage se développera sur deux niveaux différents : les fonctions du langage relatives au sujet (Vygotsky, 1938 ; Duval 1995) et les fonctions du langage relatives au référent qui sont propres au discours (Duval, 1995). Le langage naturel est outil pour la construction et la maîtrise de la pensée du sujet, c'est pourquoi les fonctions du langage sont retenues en tant qu'outil pour l'avancement du processus de résolution. En revanche, les fonctions discursives du langage sont propres au discours et pour autant détachées de l'aspect subjectif des interlocuteurs /locuteurs constructeurs du discours même. Elles seront prises en charge spécialement pour considérer le langage comme révélateur des démarches de pensée des élèves.

Mais, comment dégager les fonctions du langage à partir du discours des élèves ?
En d'autres termes, quels critères permettent-ils de reconnaître les fonctions remplies par le langage naturel lors du processus de résolution d'un problème de géométrie plane ?
Parmi ces critères nous avons retenu une liste d'unités linguistiques (partiellement tirées de la théorie de Bronckart, 1985) dont l'usage dans le discours est susceptible de marquer certaines fonctions du langage.

En résumé, le langage joue un double rôle dans le travail présent : il est à la fois outil pour l'élève résolvant le problème (c'est l'hypothèse centrale de notre recherche) et outil pour le chercheur en tant que révélateur de la démarche de résolution de l'élève.

À partir de ces considérations générales, nous dégageons la question centrale de notre recherche :
En quoi la verbalisation aide-t-elle à passer des simples constatations sur le dessin à la structuration d'un raisonnement déductif ?
Une question supplémentaire dont la réponse sera moins développée dans notre travail quoique importante sur le plan méthodologique, est :
Quels outils linguistiques permettent mettre en évidence que les échanges verbaux entre

élèves aident à l'avancement de la résolution ?
Pour répondre à ces questions, nous avons organisé la recherche en deux grandes parties.

La première partie de la thèse porte sur la délimitation du cadre théorique, elle est constituée des Chapitres I, II et III. Le Chapitre I présente les notions de dessin, de figure et d'objet géométrique par rapport au triangle classique « signifiant, signifié et référent ». Ces notions sont en effet des objets centraux dans notre recherche qui porte sur la résolution des problèmes de géométrie plane puisque la géométrie fait fortement appel à des allers et retours entre appréhension opératoire et référent théorique. Dans ce chapitre nous ne présenterons que partiellement notre hypothèse de recherche en nous appuyant sur l'idée vygotskienne (Vygotsky, 1938), reprise par Duval (1995), selon laquelle le langage naturel est outil pour la construction et la maîtrise de la pensée. C'est dans cette perspective que s'inscrit l'étude des fonctions du langage par rapport au sujet.
Le Chapitre II complète cette délimitation en présentant à la fois ce que nous retenons du cadre théorique psycho-linguistique de Bronckart, sur lequel notre recherche s'appuie pour utiliser le langage comme outil révélateur de l'avancement du processus de résolution (fonctions discursives), et le cadre théorique sur la base duquel nous développerons une analyse fonctionnelle de l'acte de communication en langage naturel. L'analyse fonctionnelle concerne pour nous l'analyse des fonctions qui sont mobilisées dans l'emploi du langage naturel lors de la résolution d'un problème de géométrie plane. En postulant que la pratique d'un discours est inséparable d'un certain fonctionnement cognitif (Duval, 1995 ; Vygotsky, 1938), un des objectifs que nous poursuivrons est de définir des fonctions que l'emploi du langage naturel doit remplir, non seulement pour qu'il puisse y avoir un discours mais pour que ce discours soit productif sur un domaine auquel les élèves sont confrontés.

L'étude développée dans cette première partie de la recherche débouche sur la problématique, présentée au Chapitre III, sur les questions et sur les hypothèses de travail. Ce chapitre présente brièvement le type d'expérimentation mise en place pour recueillir des données et la méthodologie d'analyse des protocoles expérimentaux qui relève de la mise au point de deux modèles d'analyse. Le modèle « Démarche de résolution et ses diversions » permet de partager les protocoles en *Unités de base* ; Le modèle Mécanisme (Mécanisme dessin et Mécanisme énoncé) permet d'identifier la démarche de résolution issue du dessin ou de la question du problème, sur la base du changement de la valeur (épistémique/logique) des propositions.
Le but de ces modèles est de fournir des instruments d'analyse pour confirmer ou infirmer les

hypothèses de recherche avancées.

La deuxième partie de cette étude porte sur la mise en place de notre dispositif expérimental et sur les résultats que nous en avons tirés. Cette partie cherche à préciser les conditions de fonctionnement des différentes fonctions du langage lors de la résolution des problèmes de démonstration en géométrie plane grâce à l'usage des modèles issus de notre méthodologie. Les chapitres IV, V et VI présentent respectivement : l'analyse a priori, une analyse détaillée d'un protocole à l'aide des modèles présentés au Chapitre III et l'analyse a posteriori.

Plus précisément, le Chapitre IV présente l'analyse a priori du dispositif expérimental conduit sur la base des hypothèses de recherche et des hypothèses de travail avancées au Chapitre III. On s'appuie sur la notion de contexte du discours issue de la théorie de Bronckart (1985) retenue au Chapitre II. À partir de la définition de contexte, nous avons défini la situation expérimentale concernant le dispositif expérimental, les connaissances mobilisables, et les choix des problèmes. Les problèmes choisis sont très communs dans la pratique scolaire et cela parce que nous sommes intéressés à analyser la fonction du langage lors d'une situation habituelle voir standard de résolution d'un problème de géométrie plane. La situation ne concerne donc pas une situation d'enseignement-apprentissage et les connaissances mobilisables pour la résolution sont déjà acquises par les élèves, c'est-à-dire qu'elles appartiennent au système de connaissances du sujet. Les problèmes que nous proposons dans l'expérimentation sont conçus pour mettre en évidence les fonctions du langage lors des relations entre aspect figural et aspect conceptuel dans les processus de résolutions. Pour poursuivre cet objectif, nous avons choisi faire jouer deux variables : la forme dans laquelle le problème est proposé (énoncé seul ou liste de données accompagnées d'un dessin codé), la forme dans laquelle les données sont fournies (forme analytique ou forme concentrée).

Le Chapitre V porte sur l'analyse détaillée d'un processus de résolution issu d'un protocole produit lors de notre expérimentation. Notre propos est de montrer comment les modèles proposés (Démarche de résolution et diversions, Mécanismes) sont mis en œuvre lors de l'analyse des processus de résolution. Nous montrerons aussi quelques premiers résultats obtenus de cette analyse.

Le Chapitre VI présente les résultats issus de l'analyse a posteriori des processus de résolution. Cette analyse sera réalisée à partir de la communication verbale entre élèves, c'est-à-dire à partir du discours accompagnant le processus de résolution du problème conduit par les binômes d'élèves. Ce chapitre vise mettre en évidence les résultats de la recherche à propos du langage en tant qu'outil de résolution et en tant que révélateur (fonctions du langage par rapport au sujet ou alors fonctions discursives du langage). Dans les résultats relatifs au langage comme outil de résolution, nous analyserons les fonctions que le langage recouvre lors du processus de résolution d'un problème de géométrie plane. Nous montrerons en outre, comment elles s'exercent lors de ce processus et dans quelles conditions ces fonctions sont mises en place. Pour ce qui concerne le rôle du langage comme révélateur, nous ne modifierons que partiellement la liste d'unités linguistiques et leurs usages, présentés a priori comme critères discriminatifs.

Enfin, le Chapitre VII présente le rôle joué effectivement dans la mise en œuvre de l'expérimentation des variables choisies pour concevoir les problèmes. En outre, nous présentons quelques perspectives didactiques issues des résultats de notre recherche.

CHAPITRE I

OBJETS GÉOMÉTRIQUES ET LEURS REPRÉSENTATIONS DANS LA RÉSOLUTION D'UN PROBLÈME DE DÉMONSTRATION EN GÉOMÉTRIE PLANE

0. Introduction

Dans notre recherche, nous chercherons à analyser les processus en jeu dans la résolution d'un problème de démonstration en géométrie plane. En effet, la résolution d'un problème de démonstration en géométrie plane c'est un phénomène complexe où interviennent à la fois la langue naturelle, des figures de géométrie, des connaissances des élèves… Notre objectif c'est d'arriver à disséquer de façon fine les processus qui prennent place tout au long de la résolution d'un problème de démonstration géométrique. C'est pourquoi, l'objectif de notre étude concerne d'une part l'analyse des interactions entre les aspects figuraux et conceptuels mis en jeu lors d'un processus de résolution, d'autre part le rôle de la verbalisation sur le processus de résolution et en particulier lors de ces interactions. En d'autres termes, nous sommes intéressées à une analyse fonctionnelle du langage lors du processus de démonstration en géométrie plane.

Mais, comment analyser un processus relativement complexe sur un temps de travail des élèves relativement long (une heure environ) ?

Quels sont les moyens théoriques dont nous disposons ?

Sur les allers et retours entre aspects figural et aspect conceptuel lors des processus de démonstration géométrique, nous adopterons les notions de traitement et d'appréhensions des dessins issues de la théorie de Duval. Pour atteindre l'objectif visé sur l'analyse fonctionnelle du langage lors des processus de résolution nous nous appuierons de façon privilégiée sur la théorie vygotskienne et celle de Bakhtine.

C'est pourquoi, ce chapitre contient une brève présentation des notions de dessin, figure et objet géométrique, répandues en didactiques des mathématiques, et considérées comme fondamentales pour distinguer l'aspect figural de l'aspect conceptuel que les activités en géométrie mettent en relation.

Nous aborderons ainsi la question des allers et retours entre le domaine graphique et le domaine théorique dans la résolution des problèmes de démonstration en géométrie plane.

Nous dégagerons à cette occasion une brève analyse sur les rapports entre dessin et objet géométrique construits par un sujet, lecteur ou producteur du dessin. Nous avancerons enfin une hypothèse fondamentale pour notre travail qui porte sur le rôle du langage naturel dans la résolution de problèmes de géométrie plane en nous appuyant sur une idée vygotskienne, reprise d'ailleurs par certaines didacticiens tel Duval : le langage naturel est outil pour la construction et la maîtrise de la pensée.

1. Dessin, figure et objet géométrique

L'idée de distinguer le dessin en tant qu'objet sensible, tracé sur le sable ou sur la feuille, du correspondant objet supérieur ou objet intelligible, remonte au 4ème siècle a.c. lorsque Platon dans la République expose la philosophie de Socrate. Dans l'extrait suivant, Socrate parle à propos de géomètres :

« Par conséquent tu sais aussi qu'ils se servent des figures visibles et qu'ils raisonnent sur ces figures, quoique ce ne sont point à elles qu'ils pensent, mais à d'autres auxquelles celles-ci ressemblent. Par exemple, c'est du carré en soi, de la diagonale en soi qu'ils raisonnent et non de la diagonale telle qu'ils la tracent, et il faut en dire autant de toutes les autres figures. Toutes ces figures qu'ils modèlent ou dessinent, qui portent des ombres et produisent des images dans l'eau, ils les emploient comme si c'étaient aussi des images pour arriver à voir ces objets supérieurs qu'on n'aperçoit que par la pensée »

(Platon, La République, VII livre)

Toute activité géométrique fait appel à la fois aux objets théoriques « qu'on n'aperçoit que par la pensée » et à leurs représentations spatiales. Cette distinction entre spatial et géométrique est le point de départ de notre recherche. C'est pourquoi, nous avons besoin de clarifier ce que nous appellerons « dessin », « figure » et « objet géométrique ». Nous nous appuyons sur les définitions données par Parzysz (1988) d'abord, et reprises ensuite par Laborde & Capponi (1994).

Pour Parzysz, la figure géométrique est l'objet géométrique décrit par le texte qui la définit, une idée, une création de l'esprit tandis que le dessin en est une représentation: "the FIGURE is the geometrical object which is described by the text defining it […] a creation of the imagination, an idea. This figure is most often REPRESENTED" (Parzysz, 1988 p. 80).

À propos de la représentation, Parzysz fait une distinction ultérieure entre « dessin » et « modèle » : « the representation can be 2D (drawing), if the figure belongs to plane geometry, 2D or 3D (model) if it belongs to space geometry » (ibid. p.81)

Capponi et Laborde proposent de réinterpréter la distinction entre dessin et objet géométrique avancée par Parzysz à l'aide du triangle classique référent, signifiant, signifié.

> « En tant qu'entité matérielle sur un support, le dessin peut être considéré comme un signifiant d'un référent théorique (objet d'une théorie géométrique comme celle de la géométrie euclidienne, ou de la géométrie projective). La figure géométrique consiste en l'appariement d'un référent donné à tous ses dessins, elle est alors définie comme l'ensemble des couples formés de deux termes, le premier terme étant le référent, le deuxième étant un des dessins qui le représente ; le deuxième terme est pris dans l'univers de tous les dessins possibles du référent »
> (Capponi&Laborde, 1994 p. 168)

Nous adopterons la définition de *figure* fournie par Laborde et Capponi en tant qu'ensemble de couples composés par l'objet géométrique (O) et par (d_i), un des dessins qui sont les représentations matérielles de cet objet géométrique.

$$\boxed{F = \{(O, d_1), (O, d_2), (O, d_3), \ldots (O, d_i)\}.}$$

De cette façon l'aspect théorique est lié à l'aspect graphique car le terme figure géométrique renvoie à l'établissement d'une relation entre un objet théorique et ses représentations. Ainsi la figure sera le fruit du processus d'abstraction que le sujet effectue lorsque, à partir du dessin (signifiant) il imagine l'objet géométrique (référent) représenté. Dans cette approche, comme Capponi et Laborde le soulignent « <u>les rapports entre un dessin et son référent construit par un sujet</u>, lecteur ou producteur du dessin, <u>constituent le signifié de la figure géométrique associé pour ce sujet</u> » (*ibid.* p. 169). La figure (signifié) sera alors la reconstruction mentale d'un dessin, abstrait de son support matériel, ayant pour fonction de représenter idéalement l'objet géométrique référent. Ce signifié, en tant que reconstruction mentale ou image mentale, correspond à ce que E. Fischbein (1963-1996) appelle « figural concept ».

> « The objects of investigation and manipulation in geometrical reasoning are then mental entities, called by us *figural concepts*, which reflect spatial properties (shape, position, magnitude), and at the same time, possess conceptual qualities – like ideality, abstractness, generality, perfection." (E. Fischbein, 1993, "The theory of figural concepts" p. 143)

Selon Fischbein, les figures géométriques en tant qu'entités mentales, possèdent à la fois des propriétés figurales et des propriétés conceptuelles :

> « A geometrical figure may be described as having intrinsically conceptual properties. Nevertheless, a geometrical figure is not a mere concept. It is an image, a visual image. It

possess a property which usual concepts do not possess, namely, it includes the mental representation of space property […] in general, all the geometrical figures represent mental constructs which possess, simultaneously, conceptual and figural properties" (*ibid* p. 141-142)

Donc, même le point de vue de Fischbein prend en charge le sujet. En effet, la distinction entre l'objet géométrique et le dessin, en tant que représentation matérielle, est présente dans la théorie des figural concepts, mais Fischbein se place au niveau de la **construction mentale élaborée par le sujet** et il introduit la notion de « figural concept » pour rendre compte de la construction mentale **manipulée dans un raisonnement géométrique** « image entirely controlled by a definition ». Ainsi

« a geometrical figure is a mental image, the properties of which are completely controlled by a definition ; A drawing is not the geometrical figure itself, but a graphical or a concrete, material embodiment of it; the mental image of geometrical figure is, usually, the representation of the materialized model of it. The geometrical figure itself is only the corresponding idea that is the abstract, idealized, purified figural entity, strictly determined by its definition" (*ibid.* p.149)

Les considérations présentées ci-dessus sont résumées dans le tableau suivant :

Tableau 1.1

	Référent	**Signifiant**	**Signifié**
Parzysz (1988)	Figure géométrique Objet géométrique décrit par le texte qui la définit, une idée, une création de l'esprit	Dessin Représentation de la figure géométrique appartenant au plan géométrique Modèle Représentation de la figure géométrique appartenant à l'espace géométrique	
Laborde & Capponi (1994)	Objet géométrique Objet d'une théorie géométrique comme celle de la géométrie euclidienne	Dessin Entité matérielle sur un support représentant l'objet géométrique	Figure géométrique Rapport entre dessin et objet géométrique construit par le sujet
Fischbein (1993)	Définition Appartenant à une théorie géométrique	Image-drawing "Graphical or concrete material embodiment of figure »	Figural concept « Mental entities » élaborées par le sujet

Dans la suite donc, en accord avec Laborde (1993, 1994) et Fishbein (1993), nous retiendrons la distinction entre les notions de dessin, d'objet géométrique et de figure géométrique en nous plaçant dans le triangle classique « signifiant, référent et signifié » (Laborde & Capponi, 1994).

1.1 Les rapports entre dessin et objet géométrique dans le raisonnement géométrique

Les rapports entre dessin et objet géométrique peuvent être grossièrement caractérisés par le fait que des propriétés de l'objet géométrique se traduisent graphiquement dans le dessin par des relations spatiales. Mais la complexité des rapports entre dessin et objet géométrique dépendent aussi de l'interprétation que le sujet (lecteur ou constructeur) construit du dessin. **L'interprétation du dessin** dépend évidemment des connaissances du sujet : « Un dessin renvoie aux objets théoriques de la géométrie dans la mesure où celui que le lit décide de le faire, l'interprétation est évidemment dépendante de la théorie avec laquelle le lecteur choisit de lire le dessin ainsi que des connaissances de ce lecteur. Le contexte joue un rôle fondamental dans le choix du type d'interprétation » (Laborde &Capponi, 1994, p.169)

La relation entre dessin et objet géométrique et l'interprétation du dessin comme opération qui permet de relier l'aspect graphique à l'aspect théorique, peuvent faire apparaître sur le dessin les propriétés géométriques par des marques spécifiques y renvoyant. Ces marques aident le processus d'interprétation et fournissent un moyen de synthétiser sur le dessin les données fournies dans l'énoncé du problème sous forme textuelle. C'est pourquoi, on a souvent recours, en Italie comme en France, au dessin codé (même si l'usage est réglé de façon différente dans les deux pays). Il s'agit d'un dessin marqué de symboles qui rendent compte de propriétés de l'objet géométrique abstrait. C'est au couple (dessin, marques) que le sujet attache des propriétés particulières de l'objet géométrique.

La représentation graphique de l'objet géométrique en tant que construction d'un dessin qui lui est associé, concerne encore la relation entre objet géométrique et dessin, comme nous montrerons dans le paragraphe suivant.

1.2 Registres de représentation sémiotique et appréhensions du dessin

Les représentations abordées jusqu'à présent sont des dessins (représentations graphiques) mais, de façon générale, nous retenons avec le terme « représentations » ce que Duval appelle « représentations sémiotiques » c'est-à-dire :

> « Des productions constituées par l'emploi de signes appartenant à un système de représentation qui a ses contraintes propres de signifiance et de fonctionnement. Une figure géométrique, un énoncé en langue naturelle, […], sont des représentations sémiotiques qui relèvent de systèmes sémiotiques différents » (Duval, 1993, p.39)

Les systèmes de représentation sémiotique sont encore appelés registres de représentation. C'est pourquoi dans la suite nous retiendrons le terme de « registre ». La notion de registre, issue de la théorie de Duval (1988) (voir aussi Mesquita -1989b), « désigne les différents systèmes sémiotiques qui peuvent être utilisés pour présenter une information ou pour objectiver une représentation mentale » (ibid. Mesquita, p.3)

Le domaine de la géométrie fait appel à trois registres : le *registre figuratif*, le *registre du langage naturel* et le *registre du langage symbolique* que Mesquita (1989b) définit ainsi : « Le *registre figuratif*, lié au système perceptif visuel avec les lois d'organisation propres à ce système ; le *registre du langage naturel*, avec ses possibilités de description et d'explicitation du statut de l'énoncé ; le *registre du langage symbolique*, avec ses possibilités propres d'écriture et de recours à des formules » (p.3)

Lors de la résolution d'un problème de démonstration en géométrie plane, cas concernant notre recherche, les trois registres sont en interaction et cela n'est pas sans poser des problèmes surtout pour les élèves comme l'a montré Mesquita (1989a). Un premier fait évident est que l'information issue du registre figuratif joue un rôle très important car, comme l'a d'ailleurs montré Mariotti (1991), les aspects figuraux peuvent prendre le pas chez les élèves sur le contrôle conceptuel. Tout dessin, dit Mesquita, se prête à plusieurs interprétations représentatives qui sont comme des reconfigurations de la figure initiale. Ces reconfigurations peuvent être dessinées ou rester purement mentales, mais ces reconfigurations suggèrent des démarches de pensée qui peuvent être pertinentes pour la solution d'un problème ou au contraire qui détournent de la compréhension du problème. Duval (1993) appelle « traitement »[1] la transformation de la représentation dans le registre même où elle a été formée ; dans le cas de notre expérimentation, le registre figuratif. Duval (1994) a montré qu'une même figure peut donner lieu à des appréhensions de nature différente. Il distingue trois types d'appréhensions d'une figure : *l'appréhension perceptive*, *l'appréhension opératoire* et *l'appréhension discursive*.

L'appréhension perceptive est l'appréhension immédiate et automatique de la figure « celle qui permet d'identifier ou de reconnaître, immédiatement, une forme, ou un objet, soit dans un plan, soit dans l'espace » (p.123)

L'appréhension opératoire est déterminée par la centration sur des modifications possibles de la figure (traitements de la figure) et sur les réorganisations perceptives qui en résultent « elle

[1] Duval définit le traitement comme une fonction méta-discursive, c'est-à-dire une fonction commune à n'importe quel système de représentation. « Toute information reçue doit pouvoir être transformée de façon à en extraire d'autres informations. Ainsi le discours ne communique pas seulement des informations il permet ussi de les transformer » (Duval, 1995, pp.89-90)

est l'appréhension d'une figure donnée en ses différentes modifications possibles en d'autres figures. [Duval distingue] trois grands types de modifications : les modifications méreologiques consistant dans le partage d'une figure en parties pour les recombiner en une autre figure, les modifications optiques consistant dans l'agrandissement, la diminution ou la déformation de la figure, et les modifications positionnelles consistant soit dans le déplacement de la figure dans le plan soit dans le déplacement du plan de la figure par rapport au plan fronto-parallèle » (p. 126).

Enfin, l'appréhension discursive d'une figure « correspond à une explicitation des autres propriétés mathématiques d'une figure que celles indiquées par la légende ou par les hypothèses. Cette explicitation est de nature déductive ». Duval ajoute que le traitement cognitif correspondant à cette appréhension est le raisonnement déductif « pour expliciter des autres propriétés à partir des propriétés données, on utilise des définitions, des axiomes, des théorèmes » (pp. 124-125).

Précisons que, sur la base des définitions présentées, nous adopterons le terme « appréhension du dessin » à la place d'appréhension de la figure adoptée par Duval. Pour nous la figure est conçue comme l'ensemble des couples constitués de l'objet théorique et d'un de ses dessins, et en cela elle ne peut être manipulée et recomposée en une nouvelle figure.

Nous considérons un référent théorique comme relevant d'une théorie géométrique donnée, ici la géométrie euclidienne constituée de théorèmes, définitions, axiomes…

Nous retenons aussi la notion de théorème fournie par Mariotti :

> «…the existence of a reference theory as a system of shared principles and deduction rules is needed if we are to speak of proof in a mathematical sense. Principles and deduction rules are intimately interrelated so that what characterises a mathematical theorem is the system of statement, proof and theory » (Mariotti, 1997, p 182-183)

Ainsi, la notion de théorème concerne la triade : énoncé, démonstration et théorie de référence.

2. Relations entre domaine spatio-graphique et domaine théorique

Nous développerons notre analyse des processus de résolution d'un problème de démonstration en géométrie en nous appuyant sur l'hypothèse avancée par Laborde (1999) : les allers et retours entre le domaine théorique[2] et domaine spatio-graphique[3] sont essentiels dans la résolution des problèmes de géométrie.

[2] "The domain of geometrical objects and relations" C. Laborde, 1998, p. 143

[3] "The domain of spatio-graphical entities… diagrams on the paper, on the screen of the computer, movement produced by a linkage point of a machine)" C. Laborde, 1998, p. 143

> « What we would like to stress is that in school problems even internal problem require the use of both domains and several moves between them. We think that this interplay between T[4] and SG is an essential part of the meaning of geometry…" (p. 143)

Ces allers et retours, comme souligné par Mariotti (1995), contribuent à la construction de la signification même de l'activité concernant la géométrie.

> « According to this hypothesis about the nature of geometrical concepts [figural concept définis par Fischbein] geometrical reasoning is characterized by the interaction between the two aspects, the figural and conceptual. Correctness and effectiveness of reasoning mean harmony between the two aspects, while failures may be interpreted as a break in this ideal harmony." (M.A. Mariotti, 1995, pp.103-104)

3. Le rôle du langage dans le développement de la pensée : le point de vue de Duval, Vygotsky et Bakhtine

Notre recherche porte justement sur les allers et retours entre domaine théorique et domaine spatio-graphique mentionnés ci-dessus mais en se centrant sur le rôle joué par le langage naturel dans l'établissement et le fonctionnement de ces rapports. En reprenant l'idée de « fonction d'élaboration de la pensée » que Farago a défini dans son ouvrage « Le langage » (1999), nous essayerons de clarifier le rapport entre fonctions du langage et développement de la pensée dans le cas spécifique qui concerne la résolution d'un problème de démonstration en géométrie plane.

La *Fonction d'élaboration de la pensée* est définie par Farago comme

> « l'organe de la pensée au niveau profond : […] le sujet perçoit, infère […], conceptualise le réel en utilisant les structures sémantiques, et parfois phonétiques, qui organisent son langage […] La pensée, dit ainsi Benveniste, n'est rien d'autre que ce pouvoir de construire des représentations des choses et d'opérer sur ces représentations… La pensée n'est pas un simple reflet du monde ; elle catégorise la réalité, et en cette fonction organisatrice, elle est si étroitement associée au langage qu'on peut être tenté d'identifier pensée et langage de ce point de vue» (Farago, 1999, p. 40,41).

La pensée est vue ici comme modélisation et catégorisation du réel par des opérations de conceptualisation, d'inférence… passant par l'usage du langage.

La fonction d'élaboration de la pensée remplie par le langage est le point d'ancrage de notre hypothèse de recherche.

---

[4] « T denotes the level of the theoretical referents in a geometrical theory. T refers to theoretical objects, relations and operations on these objects as well as judgements about them, that it is possible to express in various languages. SG denotes the level of the graphical entities on which it is possible to perform physical actions, and

L'hypothèse que nous avançons est que le langage naturel peut jouer le rôle d'outil d'aide à la résolution des problèmes de démonstration en géométrie plane.

Il s'agit pour nous de décrire si et comment le langage naturel peut aider ou guider les passages entre domaine théorique et domaine spatio-graphique lors de la résolution d'un problème de géométrie plane.

Notre point de vue est donc orienté vers le sujet et ses processus de pensée qui lui permettent de passer du domaine théorique au domaine spatio-graphique.

3.1 Le rôle du langage selon Duval

Comme on vient de le dire, notre recherche accorde au langage naturel le rôle d'outil pour la résolution des problèmes de géométrie plane.

Le langage est important non seulement parce qu'en tant que registre de représentation, « il est un moyen d'extériorisation des représentations mentales pour des fins de communication, pour les rendre visibles ou accessibles à autrui, mais [aussi] parce qu'il est <u>essentiel pour l'activité cognitive de la pensée</u> » (Duval, 1993, p.39). C'est sur la base de cette idée, que nous nous intéressons au rôle de l'activité langagière en géométrie et de façon particulière lors du processus de résolution d'un problème de démonstration en géométrie plane. Nous faisons l'hypothèse que, le langage naturel, en tant qu'élément essentiel pour l'activité cognitive de la pensée, peut intervenir de manière spécifique et décisive dans la résolution de ce type de problème, car il contribue à la construction des liens entre les signifiants et les signifiés.

Mais l'idée du langage naturel comme outil d'aide au sujet en train de résoudre un problème, et comme outil qui exerce la fonction d'aide à la construction de la pensée, est une des hypothèses fondamentales de la théorie vygotskienne. C'est pourquoi, notre point de départ pour l'étude et l'analyse du rôle du langage, sera la théorie vygotkienne.

3.2 Le rôle du langage selon Vygotsky

Revenons rapidement au rôle central accordé par la théorie vygotskienne à l'origine sociale des processus mentaux supérieurs. Cette théorie s'appuie sur deux thèses fondatrices complémentaires. Parler d'origine sociale c'est en effet d'abord dire que les processus mentaux supérieurs ont leur source dans l'héritage culturel. La culture se développe et se transmet en utilisant des signes et des systèmes de signes, constructions sociales externes à l'individu. Mais parler d'origine sociale, c'est dire aussi supposer que l'appropriation des signes et des systèmes de signes (les outils cognitifs) s'opère à l'occasion d'interactions

also to express ideas, interpretations, opinions, judgements." (p. 143) sociales au cours desquelles les rapports interindividuels sont médiatisés par des signes. C'est dans ces interactions sociales que les systèmes de signes deviennent outils de pensée (outils cognitifs). En effet, les interactions sociales permettent l'appropriation du langage ainsi que la construction inter-subjective (interpersonnelle) de la pensée, et cette construction se réalise au moyen même du langage. Il se produit ensuite, l'intériorisation de la construction de la pensée. Par exemple, dans l'interaction entre élèves lors d'un processus de démonstration il se peut qu'un désaccord entre les interlocuteurs donne lieu à une forme discursive interpersonnelle (une phrase) du type « si ce que tu dis est vrai…. » qui peut être ensuite intériorisée comme une composante du raisonnement par l'absurde. Bref, l'interaction permet à la fois d'enrichir le langage en tant qu'outil de communication, mais aussi en tant qu'outil pour maîtriser et orienter la pensée.

La fonction d'aide à la pensée du sujet remplie par le langage naturel, selon la théorie vyotskienne, est conséquence de sa fonction sociale: « Le langage pour soi [langage intérieur] prend naissance grâce à la différenciation de la fonction initialement sociale du langage pour les autres ».

La fonction du langage intérieur ou langage pour soi-même, est en effet pour Vygotski la suivante :

> « ce n'est en aucune façon un accompagnement, c'est une mélodie autonome, une fonction autonome, dont <u>le rôle est d'aider l'enfant à s'orienter mentalement, à prendre conscience, à surmonter les difficultés et les obstacles, à</u> **<u>réfléchir et à penser</u>**, c'est <u>un langage pour soi qui sert d'auxiliaire le plus intime à la pensée</u>… ». (Vygotsky, dernière traduction en français 1997, p. 446)

Pour Vygotsky donc, le langage, en tant que système sémiotique de représentation, ne permet pas seulement de représenter la pensée comme fonction psychique supérieure, mais aussi de la maîtriser :

> « …pour expliquer les formes supérieures de comportement [on utilise] des moyens qui permettent à l'homme de maîtriser le processus de son propre comportement.[…] toutes les fonctions psychiques supérieures sont unies par une caractéristique commune, celle d'être des processus médiatisés, c'est-à-dire d'inclure dans leur structure, en tant que partie centrale et essentielle du processus dans son ensemble, l'emploi du signe comme moyen fondamental d'orientation et de maîtrise des processus psychiques. Dans la formation des concepts ce signe est le mot qui sert de moyen de formation des concepts et devient par la suite leur symbole. » (Vygotsky, p. 119)

Le langage naturel donc, oriente et régule le processus de la pensée « les structures de la parole maîtrisées par l'enfant deviennent les structures de base de sa pensée » et aussi : « la pensée subit beaucoup de changements pendant qu'elle se transforme en parole. Elle ne trouve pas simplement l'expression dans la parole ; elle trouve sa réalité et sa forme »

Le langage naturel est un langage pour soi-même, c'est-à-dire pour le sujet qui le produit. Mais, évidemment, le langage naturel est aussi destiné à autrui, dans ce cas il remplit une fonction sociale de communication. Dans l'interaction entre les sujets, le langage remplit aussi une fonction de construction interpersonnelle de stratégies nouvelles de pensée, de façon qu'elles soient successivement intériorisées par chaque interlocuteur en devenant outil personnel de la pensée. Ce point de vue est abordé au paragraphe suivant.

3.3 Le rôle du langage selon Bakhtine

Le langage naturel exerce à la fois **la fonction de communication** pour que la pensée du sujet soit accessible à autrui et **la fonction de construction interpersonnelle de la pensée**. Mais les deux fonctions du langage naturel ne sont pas toujours remplies et toujours nécessaires à moins que la communication à autrui et la construction interpersonnelle de nouvelles stratégies de pensée ne soient explicitement demandées.

C'est pourquoi, dans notre expérimentation nous avons ajouté une dimension sociale de résolution de tâche en demandant aux élèves la production d'un seul résultat alors que le travail est mené par un binôme d'élèves. Donc, les élèves qui prennent part à notre expérimentation sont soumis à une situation de travail à deux qui rend fonctionnellement nécessaire l'expression d'oppositions entre deux choix possibles, entre deux processus de pensée possibles, et d'échange pour parvenir à une décision (comme on verra dans les chapitres II et III). Cela permet de faire avancer le processus de résolution et de fournir aussi des observables à des fins de recherche sur le rôle joué par le langage naturel lors de processus de démonstration en géométrie plane.

Par rapport à la fonction de construction sociale de la pensée, Bakhtine signale que :

> « L'idée ne vit pas seulement dans la conscience individuelle et isolée de l'être humain […] L'idée commence à vivre, c'est-à-dire à se former, se développer, à trouver et à rénover son expression verbale, à générer des idées nouvelles, seulement en entrant en rapport avec les idées d'autrui lors du dialogue. La pensée humaine ne devient véritable pensée, c'est-à-dire idée, qu'en contact avec une autre pensée […] c'est-à-dire dans la conscience d'autrui exprimée par la parole. […] L'idée est un fait vivant qui se crée au point de croisement de deux ou plus consciences lors du dialogue»
>
> (Bakhtine M. 1968, *Dostoevskij : poetica e stilistica*, Piccola Biblioteca Einaudi p. 115-116. La citation extraite est traduite par nos soins)

Pour Bakhtine, la « véritable pensée » de l'être humain, qu'il appelle idée, se développe seulement en lien avec d'autres pensées lors d'un dialogue. L'idée prend sa forme et elle peut se développer par l'expression verbale et c'est justement par cette verbalisation que se réalisent les conditions de contact avec les autres idées. L'idée que la pensée humaine se développe par confrontation est une des notions les plus importantes de la théorie de Bakhtine où nous retrouvons aussi l'idée de *polyphonie de voix.*

> « Un énoncé, verbal ou écrit, est toujours exprimé d'un point de vue [une voix], qui pour Bakhtine est plutôt un processus qu'une position fixe. La verbalisation est une activité qui change les différences en valeurs »

(Clark K. & Holquist M., 1991, *Michail Bakhtine,* Bologna : il Mulino p. 35. La traduction est à nous)

Pour Bakhtine, qui traite le rôle du langage dans une perspective totalement psychologique, la polyphonie, en tant que confrontation parmi diverses voix, fait naître l'idée et fait développer la pensée. C'est justement à partir de ce point de vue que nous formulerons l'hypothèse selon laquelle le discours, en tant qu'échange verbal de plusieurs points de vue, favorise l'avancé de la pensée. Or, comme notre analyse se déroulera dans un contexte très précis, celui de la résolution d'un problème de démonstration en géométrie plane, notre hypothèse concerne le rôle du langage dans un discours lors de cette résolution conduit par un binôme d'élèves.

En résumé, des théories présentées ci-dessus à propos du langage naturel, nous retenons les idées suivantes :

- le langage est un outil pour l'avancement et la maîtrise de la pensée. Sur la base de cette idée, nous avançons l'hypothèse que le langage naturel peut jouer le rôle d'outil pour l'avancement du processus de résolution d'un problème de démonstration en géométrie plane.
- la confrontation de plusieurs voix, en tant que situation de communication à autrui ou d'échange verbal entre deux personnes, permet la production et l'échange des idées et donc, l'avancement de la pensée. Nous adopterons cette idée pour mettre en place une expérimentation où des binômes d'élèves sont engagés dans la résolution d'un problème de démonstration en géométrie plane. Les échanges verbaux entre les élèves permettront d'une part de rendre explicites leurs processus de pensée (ils fournissent des observables) et d'autre part de progresser dans la résolution (hypothèse avancée au point précédent)

Tel est le cadre général dans lequel s'inscrit notre travail.

CHAPITRE II

LE LANGAGE : PERSPECTIVE FONCTIONNELLE

0. Introduction

Notre recherche vise étudier les relations entre le registre sémiotique de la langue et le registre figuratif lors de la résolution d'un problème de démonstration de géométrie plane. Nous poursuivons **deux objectifs** : il s'agit d'une part, de reconnaître et analyser les multiples allers et retours entre référent graphique (dessin) et référent théorique (objet géométrique) dans le discours qui se développe pendant le processus de résolution et, d'autre part de mettre en évidence le rôle joué par le langage naturel dans ces passages. Pour cela, la situation que nous prenons en charge dans notre recherche est celle d'une communication verbale entre deux élèves lors de la résolution d'un problème de démonstration en géométrie plane.

L'objet de notre recherche est donc le langage naturel en tant que registre de communication et l'objectif est l'analyse fonctionnelle de l'acte de communication en langage naturel, ce dernier étant médiateur dans la relation entre appréhension opératoire du dessin et référent théorique.

Dans la suite, nous indiquerons par le terme « référent théorique » les théorèmes (au sens de Mariotti comme nous l'avons avancé au Chapitre I), les définitions ou les axiomes d'une théorie. Cette analyse sera réalisée à partir de la communication verbale entre élèves, c'est-à-dire à partir du discours tenu par les élèves pendant le processus de résolution du problème.

Dans cette perspective, le langage jouera évidemment deux rôles différents : il est à la fois outil pour l'élève qui résout le problème (c'est l'hypothèse centrale de notre recherche avancée au Chapitre I) et outil pour le chercheur en tant que révélateur des aspects significatifs de la démarche de résolution. Nous souhaitons donc répondre aux questions suivantes : le langage est-il un outil d'aide à l'avancement de la résolution d'un problème de géométrie plane ? En d'autres termes, en quoi la verbalisation aide-t-elle à passer des simples constatations sur le dessin à la structuration d'un raisonnement déductif ?

Pour mettre à l'épreuve les hypothèses sur le langage en tant qu'outil de résolution et, en même temps, en tant que révélateur de la démarche de résolution, nous avons mis au point une méthode d'enquête. Cette méthode vise répondre à la question suivante: Quels outils linguistiques permettent de mettre en évidence que les échanges verbaux entre élèves aident à l'avancement de la résolution ?

Face aux questions posées, ce chapitre vise à décrire les éléments théoriques susceptibles de fournir ces outils linguistiques. En nous appuyant que partiellement sur les notions linguistiques définissant le discours comme un type d'organisation d'échanges interpersonnels (Beaudichon, 1999) nous conduirons une analyse fonctionnelle du discours empruntée à la recherche de Duval (1995).

Sur la base de l'idée que la pratique d'un discours est inséparable d'un certain fonctionnement cognitif (Duval-1995, Vygotsky-1938), une des premières questions que nous nous posons est celle des fonctions que l'emploi du langage naturel doit remplir, non seulement pour qu'il puisse y avoir un discours mais pour que ce discours soit productif dans un domaine auquel les élèves sont confrontés. Un discours est productif s'il permet, par exemple, l'avancement du processus de résolution d'un problème de géométrie plane. On voit donc que subordonner l'analyse des discours à la seule fonction de communication du langage ne permet pas de répondre aux questions posées ci-dessus.

Nous essayerons donc de préciser les fonctions que l'emploi du langage naturel doit remplir pour aboutir à la résolution du problème.

Nous considérons en particulier les fonctions du langage par rapport au sujet qui résout le problème, c'est-à-dire par rapport aux actions du sujet.

Dans ce but, l'analyse de l'échange communicatif sera conduite sur la base d'un premier modèle que nous avons mis au point par la délimitation d'unités de base du discours (elles sont constituées d'un triplet : [questions, construction d'une réponse, réponse]) et sur la base d'un deuxième modèle (Mécanismes) qui vise à mettre en évidence le rôle fonctionnel du langage.

1. Communication verbale

1.1 Délimitation du champ d'analyse

Au terme « communication » est associé par la littérature un vaste champ sémantique, c'est pourquoi il semble nécessaire de fixer certaines limites de notre recherche.

Dans le cas présent de notre recherche, la communication est relative à des élèves engagés dans la résolution d'un problème de géométrie plane. Les aspects non verbaux de la communication entre élèves ne seront considérés que dans la mesure où ils sont associés à la communication verbale (voir *gestes* au paragraphe suivant)

1.2 Les vecteurs non verbaux de la communication

En suivant Beaudichon (1999), nous désignons par « verbal » tout signe lexical de la langue et par non verbal tant autre signe. En outre, « nous retiendrons que la communication non verbale désigne toute communication qui intervient entre deux ou plusieurs personnes au moyen de vecteurs non verbaux… » (Beaudichon, 1999, p. 41) mais nous n'excluons pas qu'une communication puisse se réaliser au moyen de vecteurs mixtes : verbaux et non verbaux. De nombreuses études ont distingué différents types de comportement non verbal nous ne considérons ici que certains des gestes et la fonction dialogique de ces gestes dans le discours. Nous retiendrons les gestes par lesquels les élèves montrent ou indiquent une partie d'un dessin ou d'un énoncé. Ces gestes sont accompagnés par de mots utilisés en déictique et donc ils sont employés à la place d'une dénomination en langage naturel (par exemple « ça est parallèle à ça » en indiquant avec les doigts deux segments parallèles). Ils remplissent donc une fonction dialogique qui « […]intervient lorsque les signes [dans notre cas les mots utilisés en déictique ou les gestes] contribuent à régler le flux de la relation [de communication] » (Beaudichon, 1999, p. 42)

1.3 Communication

La communication dans notre recherche se situe au plan du fonctionnement socio-cognif de chaque interlocuteur. Nous adoptons en effet la définition fournie par Beaudichon (1999) dans son ouvrage « La communication » :

> « Une communication complexe efficace peut être conçue comme résultat du fonctionnement finalisé d'un ensemble d'habilitées ou savoir-faire s'exerçant sur des connaissances relatives au référent et aux conditions d'énonciation, contrôlées par des évaluations proactives et rétroactives du résultat immédiat des flux de communication successifs. Ces évaluations s'effectuent grâce à des savoirs plus ou moins consciemment appelés, plus ou moins verbalisables des principales sources de variations susceptibles d'affecter la qualité d'une communication. L'échec d'une entreprise de communication peut être dû à une lacune située à l'un des niveaux mentionnés ; il peut l'être aussi à une capacité limitée de traitement de l'information pourtant disponible, le sujet étant incapable, dans ce cas, de traiter simultanément et de combiner les informations provenant de chacun des niveaux. »
>
> Beaudichon et Ducroux, 1985, p. 140

La communication est donc conçue comme un acte social situé, elle est un échange interpersonnel à prédominance langagière. L'efficacité de la communication dépend des connaissances relatives au référent, de la capacité à faire évoluer ces connaissances, de la capacité à les verbaliser et des conditions d'énonciation qui appartiennent au contexte d'énonciation comme on verra dans la suite.

Comme Beaudichon le souligne (1999, p. 19), les partenaires de la communication verbale doivent être suffisamment actifs au plan socio-cognitif pour être :

- Motivés par des intentions et par conséquent des enjeux ;
- Capables de transmettre à autrui, socialement situé (dans notre cas, un camarade), des informations en contexte (dans notre cas, lors de la résolution d'un problème de géométrie plane), au moyen de différents ou vecteurs ou canaux;
- Capables d'exercer un contrôle délibéré sur leurs propres conduites et celles des autres individus engagés dans les relations – contrôle a posteriori (rétroactif) et/ou prévisionnel (proactif)

« Ces conduites concernent l'individu devenu compétent à la communication» (Beaudichon, 1999, p.19). Dans le travail de production d'une preuve en géométrie, on va retrouver ces conduites clés pour la communication verbale.

2. Contexte du discours

De façon générale, la communication met en jeu la transmission de *messages* qui constituent le support des informations échangées. Les messages sont de nature et de structure variées, et cela est très lié au fonctionnement de la compétence à communiquer. Les messages peuvent être organisés de façons différentes mais nous allons considérer ici un type particulier d'organisation des messages où le langage naturel joue le rôle dominant : le *discours*. L'influence du non verbal sur l'organisation des messages à été présentée plus en haut.

Le terme « discours » renvoie à des acceptions et des courants de pensée différents. Nous retiendrons de ces multiples définitions les éléments communs :

1) le fait que le discours est un échange communicatif principalement verbal
2) le fait qu'il dépend du contexte situationnel où il se produit.

En effet, le discours « renvoie à un contexte situationnel qui comporte des règles du jeu pour chacun des protagonistes dont on considère la production verbale complexe adressée à un interlocuteur ciblé avec un but précis. » (Beaudichon, 1999, p. 38)

Pour cela, nous considérerons comme **« discours » les organisations des échanges interpersonnels, donc interactifs, principalement verbaux, répondant à un certain scénario pré construit, qui dans le cas de notre expérience est le contexte d'énonciation** (cf. paragraphe suivant).

Comme on vient de le souligner, le contexte de la communication conditionne le discours, c'est pourquoi il semble être nécessaire donner une définition de contexte du discours. Bronckart (1985) assigne au contexte un rôle important dans le fonctionnement du langage. Pour cela il propose

> « une théorie de " l'espace " dans lequel se déroule l'activité langagière et auquel elle s'articule ; c'est-à-dire une théorie de l'*extralangage* au sens propre du terme. […] il y a lieu de théoriser les aspects du milieu dont on postule qu'ils sont pertinents en matière de langage, c'est-à-dire qu'ils exercent une influence observable sur les configurations d'unité linguistiques en surface des textes[1] ; conformément à la tradition en la matière, nous considérons que ces aspects (ou paramètres) se distribuent en deux domaines, celui du *référent* et celui du *contexte*, qui définissent deux ordres de pertinence pour l'élaboration des discours » (Bronckart, 1985, p.12, 13)

Par *extralangage* Bronckart définit

> « l'ensemble théoriquement infini de toutes les entités en dehors de la langue … Par essence, l'activité langagière s'articule à l'extralangage [en définissant] des **espaces** dotés de deux types de pertinence : la pertinence *référentielle,* c'est-à-dire la capacité à devenir un " contenu représenté " de l'activité langagière, et la pertinence *contextuelle*, c'est-à-dire la capacité de contrôler ou gérer le déroulement même de l'activité langagière. » (ibid.p. 26)

Sur le plan du référentiel, Bronckart définit un seul espace, l'*espace référentiel* qui est celui « des contenus » de la pensée véhiculés par le langage ; sur le plan du contexte, par contre, il définit deux espaces : *l'espace de l'acte de production* « qui regroupe les paramètres physiques rendant compte du caractère matériel de toute conduite verbale » et *l'espace de l'interaction sociale* « qui regroupe les paramètres psycho-socio-culturels attestant de ce que ces mêmes conduites s'inscrivent dans un réseau complexe d'activités humaines » (ibid. p. 27)

Or, pour surmonter le problème d'un ensemble infini d'entités au dehors de la langue qui conditionnent l'activité langagière, Bronckart considère ces trois espaces se composant d'un ensemble fini de **paramètres** pour lesquels il définit des *valeurs discrètes* auxquelles l'activité langagière s'articule. On verra dans la suite une définition détaillée de ces paramètres.

Il ressort de ce qui précède, que le concept de *contexte* pour Bronckart est incompatible avec la notion de « contexte linguistique » fréquemment utilisée en linguistique et en psychologie

---

[1] « L'ensemble organisé d'unités linguistiques constitue le texte. Le terme texte réfère une unité théorique, construite par le linguiste à partir de seuls critères "de surface", et projetée sur le corpus textuel…. La notion de corpus textuel désigne en réalité le produit verbal brut, c'est-à-dire non traité par les disciplines scientifiques »

du langage. En effet, le contexte de Bronckart concerne l'extralangage et il faut éviter de le confondre avec l'environnement linguistique d'un énoncé (partie de texte tout au tour de l'énoncé) pour lequel Bronckart adopte le terme « co-texte ».

2.1 Espace référentiel

Bronckart distingue d'abord dans l'espace référentiel ce qui relève de l'extralangage.
Ainsi, Bronckart postule l'existence de primitives psychologiques auxquelles s'articule l'activité langagière. L'adjectif « psychologique » est employé pour signifier que ces primitives ne sont pas seulement de nature « cognitif-logique ». Pourtant, nous ne retiendrons que l'aspect logique et cognitif de ces primitives en laissant de côté dans notre analyse, l'aspect psychologique.
Les primitives de l'espace référentiel sont définies par Bronckart au nombre de trois : les notions, les relations et les schématisations. Nous retiendrons que partiellement la primitive « notions », sans prendre en compte ni la définition de « relations » ni celle de « schématisations ", qui sont des opérations cognitives qui organisent les notions sur le plan de la causalité non mathématique.
« Les *notions* sont des entités qui désignent les constructions psychologiques de divers niveaux de complexité. On peut considérer en effet qu'au cours de leur développement, les interactions des sujets avec les milieux conduisent à la construction d'ensembles plus ou moins organisés de telles notions, dotées de primitives diverses, qui codifient les ″connaissances empiriques″ que les sujets ont du monde… » (ibid. p. 28)
La définition de « notions » fournie par Bronckart ne s'inscrit dans notre recherche que dans la mesure où l'on va considérer une « notion » comme l'idée de signifié et de référent: le signifié en tant que construction du sujet en relations avec son milieu, et le référent en tant qu'objet abstrait d'une théorie. La « notion » de Bronckart est alors adaptée dans notre recherche à la définition de la triade : « signifiant - signifié - référent » fournie par Laborde&Capponi (1995) permettant d'interpréter la distinction entre figure, dessin et objet géométrique. On admet alors les opérations de type cognitif et logico-mathématique sur ces objets (signifié-figure, référent-objets géométrique) appartenant au domaine de la géométrie.

2.2 Espace de l'acte de production

L'*acte de production* « délimite les caractéristiques matérielles de l'activité verbale. Celle-ci définit donc dans l'extralangage une zone de pertinence contextuelle qui peut être décrite par

---

(Bronkart, 1985, p. 11)

les trois paramètres suivants : le producteur (locuteur), les coproducteurs (interlocuteurs) et l'espace-temps » (Bronckart, 1985, p.30)

Nous verrons dans ce qui suit comment ces paramètres sont caractérisés par Bronckart et dans quelle mesure nous les retendrions dans notre recherche.

Tout d'abord, la définition de *producteur*.

« Le producteur (ou locuteur) de l'activité langagière doit être conçu comme toute instance physique d'où émane cette même activité ; il s'agit habituellement d'un organisme humain. […] A ce paramètre de producteur est associée la variable du mode de production *oral* ou *écrit* » (p. 30)

Dans notre expérimentation, nous considérerons seulement des humains comme producteurs de l'activité langagière. Comme notre expérimentation prévoit de faire travailler un binôme d'élèves, le producteur ou locuteur dans ce cas est l'élève qui prend la parole ou écrit. Nous considérons en effet les deux variables oral et écrit du mode de production.

Le deuxième paramètre fourni par Bronckart concerne « le/les coproducteur(s) (*interlocuteur*(s)) » :

« Les coproducteurs (ou interlocuteurs) sont les organismes humains physiquement présents lors de l'activité de production c'est-à-dire susceptibles de percevoir cette production et d'y répondre, de la poursuivre et de la reprendre en charge ; les coproducteurs se distinguent donc des autres humains par le fait qu'ils ont accès et contribuent à la production en cours ».

L'expérimentateur donc, ne fait pas partie des coproducteurs même s'il peut intervenir dans le discours sur la base de certaines modalités dont on verra dans l'analyse a priori. Evidemment, les coproducteurs sont dans notre expérimentation au nombre d'un seul, car les élèves travaillent par binôme.

Enfin, venons à la définition du paramètre *espace temps.* Dans le paramètre *espace temps,* « on peut distinguer une variable "espace", définie comme lieu physique auquel la production est accessible, […]et une variable "temps", défini par le moment physique auquel la production est accessible » (p. 30). Par rapport à l'organisation de l'expérimentation la variable « espace » ne conditionne pas l'aboutissement de la résolution : l'espace physique choisi pour notre expérimentation a été une salle du bâtiment de l'école des élèves (voir Chapitre IV). Par contre, si la variable « espace » est interprétée en tant que coordonnées géographiques (par exemple l'Italie ou la France), alors elle peut avoir de l'influence sur l'aboutissement et le déroulement de la résolution. Dans les deux pays, en effet, les programmes scolaires sur l'enseignement de la géométrie sont différents et cela aura sans doute des répercussions sur l'acte communicatif et sur l'acte de production de la preuve. Dans ce cas, la variable « espace » conditionnera la caractérisation de l'espace référentiel tel qu'on l'a défini ci-dessus.

Pour ce qui concerne la variable temps, nous pouvons identifier un double aspect : un temps qui correspond au moment de l'expérimentation, et un temps pendant lequel le processus de résolution du problème évolue. Le temps correspondant au moment de l'expérimentation peut avoir une certaine influence sur l'aboutissement de la résolution car il est en rapport avec le système de connaissances des élèves concernés. Leur système de connaissances, en effet, dépend de l'âge « scolaire » des élèves parce qu'il dépend du programme scolaire. Cette variable a été fixée en amont en choisissant des élèves ayant plus ou moins le même âge et donc les mêmes connaissances de base dans le domaine de la géométrie (même si les programmes scolaires sont différents dans les deux pays). Le temps pendant lequel le processus de résolution évolue, par contre, va constituer la trace d'une mémoire de ce qui a été fait. Nous croyons pouvoir en remarquer des traces dans l'usage de certains temps verbaux, tel que le futur ou le passé. Par exemple, les élèves peuvent dire « le triangle qu'on avait regardé toute à l'heure.. » ; on remarque ici qu'au cours de la résolution du problème va se constituer une mémoire des informations recueillies. Evidemment cette variable n'est pas fixée en amont de l'expérimentation mais les valeurs qu'elle peut assumer seront différentes d'un cas à l'autre.

Il faut quand même souligner que l'expérimentation a été conçue de façon que les élèves aient suffisamment de temps pour résoudre le problème en suivant leurs propres besoins. Cela favorise la communication verbale entre les élèves et donc la production d'une résolution complète qui ne concerne pas les seules réactions spontanées. La verbalisation peut avoir un certain impact sur le processus de résolution parce que le temps a été laissé aux élèves pour revenir sur le processus, se poser des questions, faire le point et planifier.

2.3 L'espace de l'interaction sociale

Comme Bronckart le souligne, une des principales difficultés consiste à délimiter " a priori" les ensembles de facteurs qui exercent une influence significative sur les conduites verbales dans un domaine spécifique. Pour surmonter le problème, Bronckart s'appuie sur l'option d'interactionisme social et sur sa conception de l'activité langagière. Pour lui, « l'activité langagière constitue le cadre qui organise et contrôle les interactions de l'organisme avec son milieu ; elle s'inscrit dans (et contribuent en même temps à définir) des zones de coopérations sociales (" lieux sociaux ") à l'intérieur desquelles des finalités sont poursuivies par les membres du groupe [...donc] l'activité langagière est à la fois un aspect de l'environnement social et la structure cadre des productions textuelles » (p.31) C'est justement ce double aspect de l'activité langagière qui conduit Bronckart à retenir comme paramètres pertinents du milieu social (paramètres dont la valeur vise à éclairer l'effet du social sur les conduites verbales effectives) : le lieu social, le destinataire, l'énonciateur et le but.

L'activité langagière en tant que « structure cadre des productions textuelles » ne sera pas retenue comme modèle d'analyse dans notre recherche car, comme on l'a déjà souligné, nous ne sommes pas intéressés à l'aspect linguistique de la production de texte. Par contre, les paramètres définissant l'activité langagière, en tant qu'aspect de l'environnement social, constitueront un outil de base pour l'analyse a priori de notre expérimentation.

Dans ce qui suit, nous allons proposer les définitions des paramètres fournis par Bronckart.

« Le *lieu social* peut être défini comme zone de coopération dans laquelle se déroule (et dans la laquelle s'insère) l'activité langagière » Dans notre cas, le lieu social dans lequel l'activité langagière se déroule est constitué par le binôme d'élèves soumis à la résolution du problème. Il ne s'agit pas d'un lieu « classe ».

« Le *destinataire* représente la cible de l'activité langagière, ou encore le "public" auquel elle est adressée. Le destinataire est le produit d'une représentation sociale, et son statut est différent de celui d'interlocuteur… ». Or, comme aux élèves a été dit que la finalité remplie par leurs productions participe d'un projet de recherche dans la perspective d'une thèse, et comme l'expérimentateur s'est présenté aux élèves en tant qu'auteur de la recherche, le public auquel la production des élèves est destinée est constitué par l'expérimentateur. L'expérimentateur, en tant que destinataire, est la représentation sociale que les élèves se font d'un chercheur en mathématiques (ou, plus généralement, d'un enseignant de mathématiques puisque les deux sont aperçus par les élèves comme experts dans ce domaine)[2]. Cette représentation peut être proche de celle qu'ils se font d'un enseignant de mathématique, car pour eux les chercheurs et les enseignants sont des experts en mathématiques.

En nous appuyant sur l'idée d'*énonciateur* de Bronckart nous considérons l'énonciateur comme la représentation sociale de la position d'élève dans un contexte de classe. Or, comme le travail est conduit par binômes et il ne s'inscrit pas dans une situation de classe, la représentation sociale de l'énonciateur à l'intérieur du binôme est la représentation d'un pair en train de poursuivre une activité langagière finalisée par la résolution d'un problème de géométrie.

Le dernier paramètre définissant l'espace d'interaction sociale est le « but ».

« Le *but* représente l'effet spécifique que l'activité langagière est censée produire sur le

---

[2] Mais encore à titre d'exemple, le texte que je produis en ce moment est destiné à un public que l'on peut définir comme la représentation sociale que je me fais des lecteurs potentiels.

destinataire », il définit en effet une « intention communicative » de l'activité langagière entre locuteur et interlocuteur qui est visée au destinataire.
Bronckart distingue quatre types fondamentaux d' « intention communicative » :
« - *informer*, c'est-à-dire transmettre au destinataire des connaissances, des impressions ou toutes des autres formes d'information ;
- *clarifier* un problème une question notamment en aidant le destinataire à découvrir des relations, à suivre un mode d'argumentation […]
- *activer*, c'est-à-dire faire agir l'interlocuteur (ou le locuteur) dans une direction plus ou moins précise ;
- *créer un contact*, c'est-à-dire ouvrir ou maintenir ouvert un espace d'interaction avec un destinataire » (p.34).

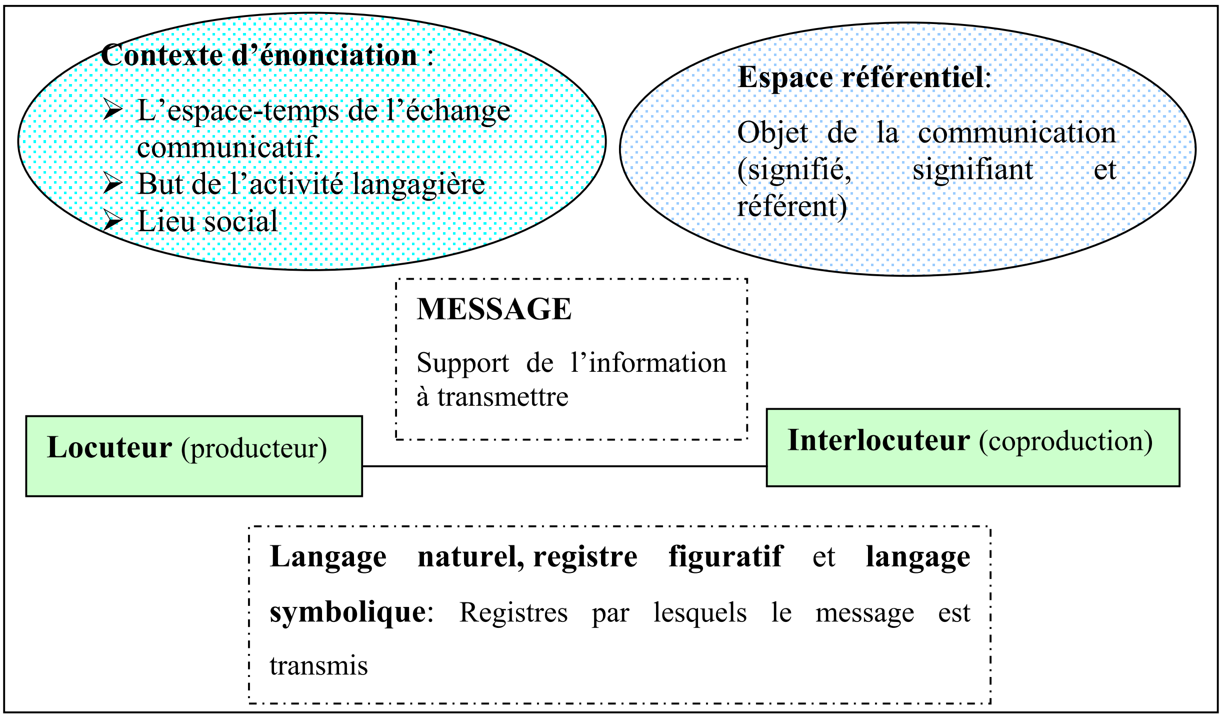
Or, dans la situation que nous proposerons aux élèves l'effet spécifique que visent les conduites langagières, participe sans doute de toutes les intentions communicatives décrites ci-dessus de façon générale. Les intentions communicatives en jeu dans notre expérimentation relèvent de deux finalités plus spécifiques : d'une part la production à fournir, et d'autre part l'élaboration de cette production. Ainsi, les intentions communicatives visent à justifier une assertion par un type de justification spécifique aux mathématiques, celui de la démonstration, et aussi servent aux élèves pour arriver à élaborer cette production.
En outre, Bronckart clarifie la relation entre le pair énonciateur-destinataire d'une part et le pair producteur-coproducteur d'autre part en disant que
« Dans toutes formes d'activité langagière, même dans les échanges oraux les plus "terre à terre", il y a lieu faire des distinctions entre les protagonistes matériels et les rôles (ou positions) qui sont assumés au travers des échanges. … Au travers du discours d'un seul producteur, plusieurs "voix sociales" peuvent s'exprimer » (Bronckart, p.32). Pour Bronckart donc, les protagonistes matériels de l'activité langagière sont le producteur et le coproducteur, tandis que l'énonciateur et le destinataire sont les rôles sociaux assumés dans le contexte d'échange au travers les échanges communicatifs. Dans le cas de notre expérimentation, il est évident que les protagonistes matériels de l'échange communicatif entre pairs, étant des élèves, assument le rôle social d'élèves par rapport à l'extérieur du binôme mais qu'à l'intérieur du binôme ils recouvrent la même position sociale.
Les élèves sont producteurs et coproducteur par rapport à la production de la démonstration et au cours du processus d'élaboration de cette démonstration ils sont engagés dans des échanges verbaux pour lesquelles ils sont interlocuteur et locuteurs.
Notre situation d'expérimentation rendra compte d'une relation neutre ou équilibrée entre les

deux élèves en train de résoudre le problème dans un champ d'interaction cognitive. Les élèves sont alors à la fois producteurs et co-producteurs ainsi que locuteur et interlocuteur (producteurs et coproducteurs) dans un champ d'action restreint au groupe constitué par le seul binôme. Comme on verra dans le chapitre consacré à l'expérimentation, chaque binôme travaille de façon indépendante, c'est pourquoi le contexte d'énonciation ne prévoit pas une interaction entre binômes.

3. Schéma de la communication

En s'appuyant sur l'organisation des espaces référentiel et contextuel fournis par Bronckart et repris ci-dessus, présentons un schéma de la communication sociale qui se réalise entre pairs lors de la résolution d'un problème de géométrie plane. Ce schéma vise à caractériser la situation de communication entre les élèves engagés dans l'expérimentation au moyen des paramètres que nous avons retenus de la théorie de Bronckart. Nous considérons à la fois deux aspects : le « contexte d'énonciation » avec les paramètres définissant l'espace de l'acte de production et de l'interaction sociale, et l' »espace référentiel » avec le paramètre de notion que nous interprétons en termes de signifié, signifiant et référent.

Fig. 2



L'acte de communication, en tant qu'acte social situé dans un certain espace-temps, produit un message qui constitue le support de l'information à transmettre. L'analyse du message peut être abordée sous deux points de vue : la construction du message et le contenu du message. La construction du message dépend en partie des valeurs données aux paramètres du contexte d'énonciation : producteur-coproducteur, espace-temps, but et lieu social, mais sa construction dépend aussi des valeurs données aux paramètres de l'espace référentiel (« notion » au sens de Bronckart, ou élément du triplet référent -signifiant-signifié au sens Laborde&Capponi)

Le contenu du message est lié à l'objectif visé par les interlocuteurs, c'est-à-dire la communication avec finalité de production d'une démonstration à fournir.

Il s'agit ici de répondre à la question : « que communique-t les élèves ? ». Dans le cas de notre expérimentation, il s'agit de répondre aux questions d'un problème de géométrie plane et donc il s'agit de produire une démonstration dans le domaine de la géométrie. La production des informations constituant de la démonstration peut passer par le registre langagier mais peut passer aussi par le registre figuratif ou le langage symbolique.

Mais une autre question se présente : « comment communique-t-les élèves ? »

« pour se comprendre mutuellement, [les élèves] vont devoir déployer un certain nombre d'habilités constitutives de leurs compétences à communiquer » (Beaudichon, p. 57) dans notre cas, les habilités mises en jeu dans la communication entre les élèves ne participent pas seulement des habilités langagières, mais elles sont spécifiques de la résolution d'un problème de géométrie plane pour la production d'une démonstration.

Or, dans cette analyse du message il reste à répondre à la question suivante : quelle est la forme du message ? L'information peut être véhiculée par le registre langagier (qui reste le registre privilégié dans notre analyse) mais elle peut être aussi véhiculée par le registre figuratif ou le langage symbolique. Dans le registre figuratif, on retrouve par exemple les icônes ou les représentations symboliques qui, dans le cas de la résolution d'un problème de géométrie peuvent être considérées comme les dessins (signifiants) associés à l'objet géométrique.

4. Caractère fonctionnel de la communication

Comme on a déjà dit à plusieurs reprises, l'analyse fonctionnelle du langage que nous souhaitons dégager dans cette étude se développe sur deux niveaux différents :

- l'analyse du rôle du langage comme outils de résolution par rapport aux sujets censés résoudre le problème, qui dégagera les fonctions du langage;
- l'analyse du discours produit par les élèves en train de résoudre le problème, qui dégagera des fonctions discursives.

Le point d'ancrage de l'étude du rôle du langage par rapport au sujet, a été présenté au Chapitre I en proposant l'idée du rôle du langage dans le développement de la pensée, issue des théories de Duval, Jakobson, Vygotsky et Bakhtine. En outre, les résultats de notre recherche, qui seront présentés au Chapitre VI, proposeront un éventail de fonctions que le langage peut exercer comme aide à l'avancement du processus de résolution.

Notre intérêt pour les fonctions discursives du langage, a trait à la **fonctionnalité du discours de l'acte communicatif par rapport à la tâche à résoudre.** C'est pourquoi, nous appuierons d'abord l'analyse sur la linguistique fonctionnelle. En effet, si la linguistique se centre surtout sur l'étude du discours produit par un acte communicatif, la linguistique fonctionnelle s'occupe de la fonctionnalité du discours. Elle a défini et étudié les fonctions correspondant au transit des informations de la source jusqu'au destinataire et elle a trouvé dans Jakobson (1963) un de ses représentants majeurs.

La Pragmatique s'est déjà occupée de l'aspect fonctionnel du langage par rapport à la tâche que l'acte communicatif doit accomplir, mais son point de vue est centré sur un contexte situationnel proche du quotidien. Notre contexte d'énonciation, par contre, est spécifique d'une situation de résolution d'un problème de démonstration de géométrie plane. Par conséquent, les paramètres définissant l'espace de l'acte de production et de l'interaction sociale assument des valeurs plus ponctuelles par rapport à celles d'un discours qui se réalisent dans le quotidien, car le but de la communication est celui d'une tâche de type scolaire, placée dans un contexte référentiel théorique bien précis. Il ressort de ce qu'on vient de dire, que le point d'ancrage de notre analyse fonctionnelle du langage se détache de l'approche pragmatique en ne s'appuyant que partiellement sur la linguistique fonctionnelle.

Or, la compétence à communiquer[3] est **fonctionnelle** c'est-à-dire qu'elle n'existe et n'a de sens que par rapport à un objectif à remplir[4]. Elle est, comme on a déjà dit, dépendante du contexte d'énonciation et du référent objet du message : les ressources du locuteur comme celles des interlocuteurs s'organisent en vue de cet objectif. Ces ressources issues de l'espace référentiel et en général des valeurs des paramètres du contexte d'énonciation produiront une action de communication.

Or, les questions centrales de notre recherche visent justement à caractériser la fonctionnalité du langage et la fonctionnalité du discours lors d'une activité de communication particulière, celle de la résolution d'un problème de géométrie menée par un binôme d'élèves.

Cela nous amène au problème central de notre recherche :

---

[3] Cf. paragraphe 1.3

[4] Du point de vue strictement linguistique de la communication, cet objectif participe des intentions communicatives décrites par Bronckart, mais du point de vue plus spécifique de notre expérimentation, l'objectif à rejoindre est aussi la production d'une preuve donc il concerne strictement le cadre théorique de la géométrie.

- **Quelles fonctions discursives seront-elles remplies lors d'un acte communicatif entre deux élèves en train de résoudre un problème de géométrie plane ?**
- **Quelle fonction (ou quelles fonctions) exerce-t-elle le langage naturel dans le processus de résolution d'un problème de géométrie plane?**
- **Le langage naturel est-il outil pour les élèves qui résolvent le problème ?**

Comme de nombreux travaux dans le domaine de la psychologie et dans celui de la linguistique le soulignent, dans l'interlocution, il est rare qu'une seule fonction soit assumée par une communication. Il y a le plus souvent une fonction principale dominante et une concomitance d'autres fonctions.

> « Les fonctions du langage sont pour la plus part du temps mêlées, mais c'est chaque fois la fonction prédominante qui détermine la structure du message …la fonction référentielle est la tâche dominante de nombreux messages, la participation secondaire d'autres fonctions à ces messages doit être prise en compte. » (Farago, 1999, p. 38).

Sur la base de ce principe de multifonctionnalité d'une même production langagière se sont développées de nombreuses analyses fonctionnelles du langage, mais celle que nous retiendrons s'appuie à la fois sur l'analyse de Jakobson (1963) et sur celle de Duval (1995).
L'analyse de Jakobson est un point d'ancrage pour notre travail : elle accorde au langage une suite de fonctions correspondant à la transmission d'informations entre l'interlocuteur au locuteur.

4.1 Les fonctions du langage selon Jakobson

Jakobson distingue différentes fonctions du langage : la fonction référentielle, les fonctions interpersonnelles et les fonctions métalinguistiques, mais nous ne retiendrons pour notre étude que les fonctions référentielle et métalinguistique car le langage dont nous envisageons de rendre compte, en tant que moyen de médiation, est ancré sur des notions et ne prend pas en charge de façon spécifique les relations interpersonnelles des interlocuteurs. Les fonctions interpersonnelles du langage passent donc dans notre analyse nécessairement en deuxième plan.

Fonction référentielle (ou cognitive) : c'est la fonction la plus importante du langage qui consiste à transmettre à autrui des informations concernant le monde empirique et concret (au sens de Jakobson). Duval appelle cette fonction « référentielle de désignations d'objets » et, comme on verra dans la suite, il considère qu'elle permet de désigner des objets.
Or, notre recherche s'appuie sur la situation particulière de communication entre élèves en train de résoudre un problème de géométrie plane. Cela restreint le champ d'action dans un

contexte d'énonciation très précis qui ne concerne pas nécessairement le concret mais peut porter sur des objets géométriques, figures ou dessins (au ses de Laborde&Capponi). Par conséquent, nous retenons la fonction référentielle en tant que fonction qui permet de désigner des objets, au sens de « notions » caractérisant l'espace référentiel.

Fonction métalinguistique : il s'agit de la fonction par laquelle le locuteur s'exprime à propos du discours lui-même, par exemple en portant un jugement sur le caractère correct ou incorrect d'un énoncé.

Cette acception de la fonction métalinguistique est liée spécialement à l'explicitation de la valeur sémantique plutôt que logique des propositions. Mais, comme on verra dans la suite, l'acception de la fonction métalinguistique que nous retiendrons sera liée plutôt aux valeurs logiques des propositions composantes le message. C'est pourquoi, la fonction métalinguistique sera considérée dans notre analyse comme souvent proche de la fonction *planificatrice* du langage par laquelle les élèves produisent un projet de déroulement du processus de résolution (cf. paragraphe « Mécanisme centré sur le dessin »).

4.2 Les fonctions du langage selon Duval

Duval consacre le deuxième chapitre de son ouvrage « Sémiosis et pensée humaine » (1995) aux différentes fonctions discursives qu'un système sémiotique doit permettre de remplir pour être une langue. Duval distingue deux plans différents parmi les fonctions qui sont mobilisées pour l'emploi d'une langue : celui des fonctions communes à différents systèmes de représentation, et celui spécifique à l'emploi de la langue. Pour notre étude, nous retiendrons seulement ces dernières.

Parmi les fonctions discursives, Duval définit la *fonction référentielle*, la *fonction apophantique*[5], la *fonction d'expansion discursive*, la *fonction de réflexivité* (Duval, 1995, p. 91). Reprenons les seules définitions de fonction référentielle, de fonction apophantique et de fonction d'expansion discursive qui sont les plus pertinentes pour notre recherche.

La fonction référentielle sert à « désigner des objets »

La *fonction apophantique* sert à « dire quelque chose des objets que l'on désigne sous forme d'une proposition énoncée ». Cette fonction permet la constitution d'un énoncé complet, par exemple la description d'un objet qu'on a précédemment désigné

La fonction d'expansion discursive sert à « relier la proposition énoncée à d'autres

[5] La fonction apophantique est relative à une « unité apophantique » qui corresponde à un énoncé complet sauf qu'elle prend en compte la différence qu'il y a entre une proposition, ou une phrase, et un texte .

propositions (description, inférence…) »
Or, le point important est que pour Duval chacune de ces fonctions peut être remplie par différentes **opérations discursives.** La notion d'opération est relative à la production du discours et elle est irréductible à l'application de règles linguistiques d'ordre syntaxique, sémantique ou pragmatique. De ce point de vue, le lexique et les règles d'une langue sont en deuxième plan. Pour Duval donc, l'analyse du discours est de caractère fonctionnel et cela veut dire que « l'organisation d'un discours dépend toujours des fonctions discursives et des opérations discursives sélectionnées pour remplir ces fonctions » (Duval, p.95). Venons donc aux définitions des opérations qui permettent d'accomplir la fonction référentielle.

La première fonction d'une langue est de permettre de désigner des objets. Cette fonction mobilise un nombre considérable d'opérations discursives entre autres l'opération de désignation pure, l'opération de catégorisation simple et l'opération de description.
L'*opération de désignation pure «* consiste à identifier un objet, soit en le montrant par un geste, soit en lui associant une marque particulière ou une combinaison particulière de signes… » (p.98). Dans la résolution d'un problème de géométrie plane, l'action de « montrer par un geste » peut permettre d'indiquer, par exemple par un geste des doits, un élément de base du dessin (point, segment, …) ou une sous-configuration du dessin. L'association d'une marque à l'objet indiqué relève, par exemple, du codage de cet objet : l'association d'une lettre à un point (le point H), d'une lettre au cercle (le cercle (C)), aux extrémités d'un segment (le segment AB)… Mais le codage de deux éléments de base du dessin par une même marque ne rentre pas dans ce type d'opération car cela met en relation deux objets et, évidemment, ne concerne pas une simple opération de désignation.
L'opération de *catégorisation simple «* consiste à identifier un objet par une de ses qualités, c'est-à-dire le désigner en indiquant la classe typique à laquelle il appartient… », Par exemple : « Soit I le **milieu** du **segment** AB… » (p. 99)
L'*opération de description* « consiste à identifier un objet en croisant les résultats de plusieurs opérations de catégorisation » Par exemple : « Soit I le point **d'**intersection **des** hauteurs **d'**un triangle »(p. 99)

La possibilité de désigner des objets, dit Duval, n'est pas suffisante pour permettre une activité discursive. Une langue doit aussi permettre de pouvoir dire quelque chose sur les objets désignés. C'est ce que Duval appelle la « fonction apophantique » déjà mentionnée. Une des opérations qui permettent de remplir cette fonction consiste à lier l'expression d'une propriété, d'une relation ou d'une action à une expression désignant des objets.
Des ces fonctions décrites par Duval, nous retenons pour notre recherche la fonction

référentielle, avec ses opérations, et la fonction apophantique.

La fonction d'expansion discursive, illustre essentiellement la construction d'unités linguistiques (unités du discours), et la composition de ces dernières en un discours construit selon certains **modes d'expansion discursives**. On peut s'attendre à ce que la fonction d'expansion discursive joue un grand rôle dans la production d'une démonstration puisqu'une démonstration est un ensemble structuré de propositions selon des règles prédéfinies. C'est pourquoi, nous retiendrons dans notre analyse fonctionnelle du langage seulement la fonction référentielle, en tant qu'action de désignation d'un référent et la fonction apophantique, permettant de construire énoncés complets. Nous désignerons les autres fonctions sous le terme « modes d'expansion du discours » dont on discutera dans les paragraphes suivants.

Le point de vue abordé par Duval semble être un point d'ancrage utile pour notre analyse même s'il paraît plus proche du point de vue linguistique que du point de vue didactique : Duval considère la fonction du langage par rapport au référent alors que notre point d'ancrage est plutôt du côté du sujet élève. Cela implique que nous analyserons les fonctions du langage par rapport à l'action du sujet qui résout. À notre avis donc, la fonction référentielle, la fonction apophantique et la fonction d'expansion discursive se situent à des niveaux différents : la fonction référentielle est évidemment en rapport avec le sujet, tandis que les deux autres sont propres au discours et sont en rapport avec le référent.

Résumons notre position par rapport à la notion de fonction du langage. Notre propos n'est pas ici de tester les définitions de fonctions du langage ou discursives fournies par l'abondante littérature psychologique ou linguistique, nous chercherons plutôt à identifier les fonctions possibles que le langage peut recouvrir en tant qu'outil, dans la situation particulière de résolution d'un problème de démonstration de géométrie plane. Nous partirons donc de ce qui semble être une donnée fondamentale qui ressort des théories linguistiques et psycholinguistiques : les fonctions du langage présentées ci-dessus. À partir de là, nous envisagerons la mise en évidence d'autres fonctions du langage en tant qu'outils de résolution (fonctionnalité du langage par rapport à la tâche à résoudre et par rapport au sujet résolvant).

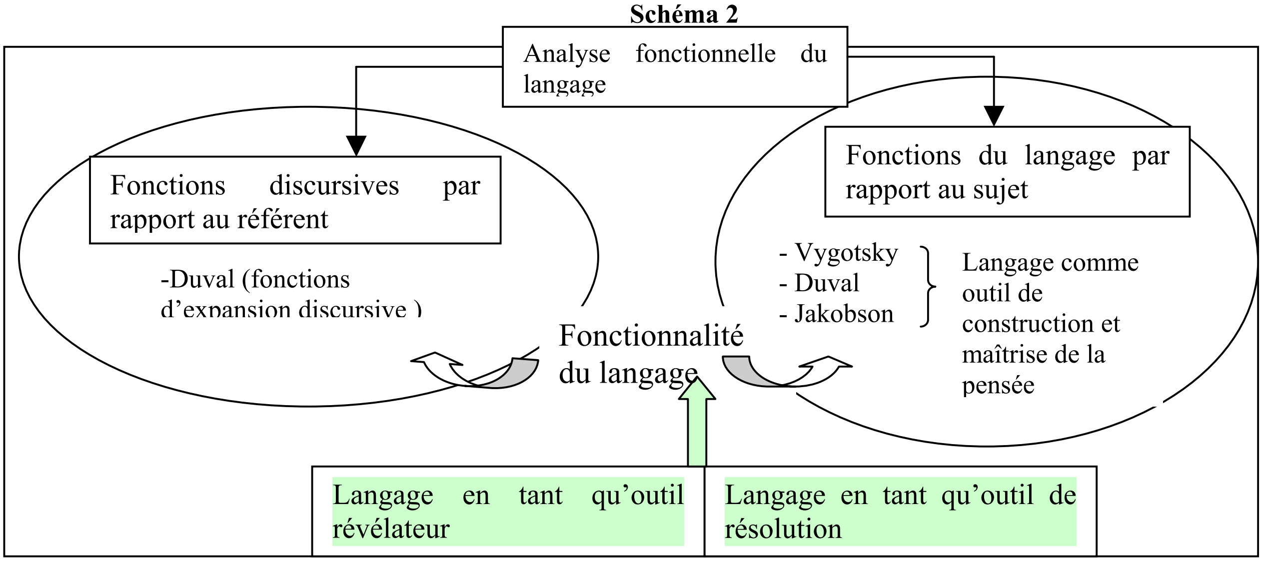
Soulignons encore que, parmi les fonctions du langage, nous distinguerons les deux types différents de fonctions : celles qui sont en rapport avec le sujet qui résout et celles qui sont en rapport au référent. Nous appellerons les premières fonctions du langage, les deuxièmes fonctions discursives.

Il s'agira a posteriori, par une analyse des protocoles, de trouver si et comment on peut mettre en correspondance les deux catégories de fonctions, et cela conduira à des correspondances entre sujet et référent.

Nous souhaitons mettre aussi en évidence le double rôle du langage : le rôle de « révélateur » du langage en tant qu'une sorte de méta-fonction du langage et le rôle joué par le langage comme outil pour l'avancement de la résolution du problème.

Pour fournir une vue d'ensemble des perspectives différentes remplies par les fonctions du langage dans le processus de résolution mené par les élèves, nous proposons le schéma suivant

Schéma 2



5. Modes d'expansion discursive

Puisque le discours des élèves porte sur la production d'une démonstration, il nous paraît important de repérer dans ce discours les modes d'expansion discursives. Duval distingue deux modes d'expansion discursive, ou modes de progression du discours : l'un caractérisé comme logique qui fonctionne par inférences c'est-à-dire par substitution, l'autre caractérisée comme naturel, qui se fait par accumulation de traits et d'informations nouvelles.

Dans le premier cas, « la progression des propositions, qui répond à un ordre non modifiable, se fait par substitution du résultat des nouvelles inférences à celui des inférences antérieures »[6], tandis que dans le cas de l'accumulation « les phrases s'ajoutent les unes aux

[6] Une substitution peut être interprétée comme une composition de plusieurs applications de la règle du modus ponens :

α

$\alpha \rightarrow \beta$

—

β

$\beta \rightarrow \gamma$

—

γ

On va substituer le résultat γ à β sans garder ni α, ni $\alpha \rightarrow \beta$, ni β et $\beta \rightarrow \gamma$ non plus.

autres parce que là, le discours "détermine progressivement les objets dont il traite (Grize, 1983, p. 217-218). Cela veut dire qu'un même objet du discours (phénomène, personnage, situation…) peut être transformé ou enrichi» (Duval, p.123).

A partir de l'hypothèse de Duval, lorsqu'un discours se restreint à la seule production d'inférences, qui à partir des données du problème donnent comme conclusion la réponse à la question du problème, et lorsqu'on perçoit à chaque pas de déduction la règle utilisée que celle-ci soit explicitée ou reste implicite, nous reconnaîtrons un mode d'expansion discursive de type « substitution »[7]. Pour l'instant, nous considérons qu'il y a mode d'expansion discursive de type « accumulation » lorsqu'on ne rentre pas dans le cas précédent.

Or, en accord avec l'hypothèse centrale de notre recherche concernant la fonction du langage dans l'avancement du processus de la résolution du problème, nous pouvons raisonnablement avancer l'hypothèse suivante :

L'avancement de la résolution d'un problème de démonstration en géométrie peut passer par le déplacement d'un mode d'expansion discursive plus spontané comme celui de l'accumulation, au mode d'expansion discursive plus élaboré comme le mode de substitution.

L'objectif des paragraphes suivants sera d'analyser le rôle joué par ce déplacement de modes d'expansion discursive, pendant l'avancée de la résolution du problème.

6. Eléments conditionnant l'expansion discursive selon Duval

L'expansion discursive est conditionnée, selon Duval, par le « sens » à donner aux propositions en tant qu'unités discursives que tout raisonnement combine.

> « … le "sens" d'une proposition n'est pas seulement déterminé par son contenu sémantique mais par ses différentes valeurs, logique, épistémique ou sociale. …Le fonctionnement cognitif du raisonnement dépend d'abord de l'interaction entre trois composantes du "sens" des propositions énoncées dans le raisonnement : le contenu sémantique, la valeur logique de vérité et la valeur épistémique. » (Duval 1995, p. 218)

Dans notre recherche, il s'agit justement de mettre en évidence l'avancement du discours de résolution (de l'accumulation simple jusqu'à la substitution), par le changement de la valeur des propositions en tant que facteur d'évolution du raisonnement lors de la résolution d'un problème de démonstration en géométrie plane.

Nous faisons l'hypothèse que le changement de la valeur des propositions (de la valeur épistémique à la valeur logique de vérité) constituera l'élément du langage naturel qui sera à la fois révélateur du déroulement de la résolution et l'outil pour l'avancement du processus de résolution.

[7] Pour une définition ponctuelle de Substitution voir le paragraphe 6.6

Venons aux définitions de valeur épistémique et de valeur logique de vérité fournies par Duval.

La **valeur épistémique** est définie par Duval comme « le degré de fiabilité que possède ce qui est énoncé dans la proposition. Dans l'instant même de son appréhension, le contenu d'une proposition apparaît évident ou certain ou seulement vraisemblable, ou plausible, ou simplement possible, ou impossible ou encore absurde… » (Duval, 1995, p.219). Selon Duval, donc, la valeur épistémique d'une proposition est strictement liée au système de connaissances du locuteur ou de l'interlocuteur et au milieu socio-culturel auquel il appartient. La **valeur logique** de vérité « est le fait que la proposition énoncée est soit vraie soit fausse. A la différence de la valeur épistémique, la valeur logique d'une proposition ne dépend pas de la seule compréhension de son contenu mais elle résulte de procédures spécifiques de vérification ou preuve » (Duval 1995, p.220). En outre, Duval souligne qu'il y a beaucoup de propositions dont on ne peut pas déterminer la valeur vraie ou faux bien qu'elles puissent apparaître évidentes, plausibles, peu vraisemblables ou invraisemblables. Pour cette raison Duval prend aussi en charge une troisième valeur de vérité, « Indéterminé ».

En résumant, la valeur épistémique d'une proposition relève donc de la compréhension du contenu, tandis que la valeur logique de vérité relève de procédures externes à la compréhension du contenu. En outre, si les propositions énoncées ont toutes une valeur épistémique liée à leur compréhension, elles n'ont pas toutes une valeur logique déterminée.

Or, l'explicitation de la valeur de vérité des propositions passe par le recours à des expressions tels : « il est vrai que… », « il est faux que… », et la valeur de vérité « Indéterminé » sera explicitée par le recours à l'expression tel : « il n'a pas encore été montré que… ». L'explicitation de la valeur épistémique passe par les propositions tels : « il est évident que… », « je crois que… », « je suis sûr que… », « on admet que… ».

Il est évident que « la valeur épistémique d'une proposition reste plus souvent implicite [et cela parce que] la compréhension de la proposition implique la détermination de la valeur épistémique de son contenu. Pour que la valeur épistémique d'une proposition soit explicitée, il faut qu'il ait un conflit cognitif potentiel. … et un tel conflit ne surgit pas seulement en présence d'une contradiction logique entre deux propositions, mais en présence d'un écart de valeurs épistémiques pour une même proposition » (Duval 1995, p.220). Cela peut se produire dans une situation de communication, c'est-à-dire lorsque le raisonnement est conduit par plusieurs personnes, car, comme Duval le souligne, « une même proposition n'a pas nécessairement la même valeur épistémique pour deux personnes différentes » (Duval 1995, p. 219). Pour cette raison, le contexte d'énonciation choisi pour notre expérimentation considère un binôme d'élèves comme lieu social où le discours est produit.

Une proposition énoncée n'a pas seulement un « sens » lié à sa valeur, pour Duval elle a aussi un *statut* qui dépend du contexte d'énonciation. Le contexte d'énonciation pris en charge par Duval semble dépendre du contenu du discours (ou de la proposition énoncée) et de ce que les linguistes appellent « co-texte ». Le contexte d'énonciation d'une proposition dépendra non seulement du fait que la proposition participe ou ne participe pas d'un pas de déduction, mais aussi du fait qu'elle est ou elle n'est pas énoncée dans un cadre théorique. Selon Duval, donc, le contexte d'énonciation dépend du domaine, théorique ou non théorique, où se déroule l'activité. Mais Duval ne considère pas les paramètres sociaux comme constituant le contexte. La définition de contexte d'énonciation prise en charge par Duval diffère donc de celle proposée par Bronckart. Or, comme nous avons retenu dans notre cadre théorique le contexte d'énonciation au sens de Bronckart, nous essayerons d'adapter cette définition aux notions de « statut » des propositions énoncées et de « valeur » des propositions fournies par Duval.

« Le **statut** d'une proposition est ce qui détermine sa place dans l'organisation discursive d'un ensemble de propositions » (Duval, 1995, p. 223). Duval distingue deux types de statuts : le statut opératoire et le statut théorique. Une proposition assume un statut opératoire dans un pas de déduction si elle constitue une des prémisses du pas de déduction, ou la conclusion ou l'énoncé tiers, au cas où l'inférence des prémisses à la conclusion n'est pas directe. Si la proposition est exprimée dans un cadre théorique (tel que le cadre de la géométrie euclidienne, par exemple), la proposition pourra assumer aussi le statut théorique de définition, de théorème, d'axiome… de la théorie.

Or, si l'organisation discursive ne participe pas d'un pas de déduction ou d'un enchaînement de pas de déduction, c'est-à-dire d'une substitution, il est évident que les propositions ne possèdent pas de statut opératoire: l'organisation discursive de l'ensemble des propositions est constituée par la concaténation de phrases qui participent d'un réseau sémantique lié à leur contenu. Les propositions sont alors liées les unes aux autres sur la base d'une association sémantique mobilisée par l'association de mots et par la mobilisation d'une connaissance formulée de diverses manières. Au contraire, si les propositions participent d'un pas de déduction ou d'un enchaînement de pas de déductions (voire une organisation complète comme la substitution), elles se caractérisent par un ensemble de statuts opératoires (prémisses, conclusions ou énoncé tiers) qui déterminent l'organisation interne de l'enchaînement de phrases. L'avancée de la résolution du problème se caractérise donc par la construction d'un discours dont les propositions participent de la relation entre deux statuts opératoires : le passage des prémisses à la conclusion. Lorsque le raisonnement se place dans un cadre théorique, le passage des prémisses à la conclusion se fait par un énoncé-tiers et certaines propositions assument aussi un statut théorique (de théorème, de définition, d'axiome…).

Sur la base de ce qu'on vient de dire, lorsque l'expansion discursive se fait par accumulation (accumulation de traits et d'informations nouvelles), le passage d'une proposition à l'autre passe par leurs contenus, donc dans un réseau sémantique. Pour Duval dans l'accumulation « la différence de statut n'a qu'une portée locale dans l'organisation du discours et le passage d'un énoncé à l'autre est exclusivement fondé sur des relations de contenu et non pas sur des différences de statut » (Duval, 1995, p. 124). À partir de la définition d'accumulation fournie par Duval, nous retenons dans l'accumulation, la juxtaposition de propositions, qui porte sur la juxtaposition d'informations, et des pas de déductions d'une portée locale. Généralement, donc, les propositions de l'accumulation n'ont pas un statut opératoire à moins que le recueil d'informations ne participe d'un pas déductif ou d'un enchaînement de pas de déduction[8].
Ainsi les propositions ont toutes une valeur épistémique sémantique (vraisemblable, possible, évident, absurde…) mais n'ont pas toutes une valeur logique de vérité (vrai, faux) à l'exception de la valeur « vrai » associée aux informations déduite par inférence ou, dans le cas d'un problème à résoudre, données dans l'énoncé du problème.
Au contraire, lorsque l'expansion discursive se fait par substitution le passage d'une proposition à l'autre ne dépend pas de leur contenu mais de leur statut, c'est-à-dire du fait qu'il y a des prémisses, une conclusion et un énoncé-tiers qui légitime le passage des unes au l'autre. La substitution concerne un recyclage des propositions : une conclusion et reprise comme prémisse du pas successif.

7. Conclusions

Sur la base des cadres théoriques présentés plus haut, nous définirons notre méthodologie de recherche. Pour analyser les résolutions de problèmes de démonstration proposés aux élèves, nous nous servirons des modes d'expansion discursives définis par Duval, en cherchant à identifier dans le discours des élèves ce qui relève d'un mode accumulation de ce qui relève

[8] Bien évidemment, cet enchaînement de pas de déduction n'a pas comme prémisses les données du problème et comme conclusion la réponse au problème car, dans ce cas, l'expansion discursive serait de type « substitution » .

d'un mode substitution. Cela nous permettra de relever lors des discours des élèves des modèles d'action et nous permettra en outre, de relier l'avancement du processus de résolution à la verbalisation des théorèmes faite au cours du processus de démonstration.
Nous pourrons donc mener l'analyse des fonctions du langage mobilisées lors du processus de démonstration sur niveaux différents: d'une part les fonctions du langage par rapport au sujet élève qui résout le problème (les fonctions du langage sont outil pour l'avancement du processus de résolution) et d'autre part les fonctions discursives par rapport au référent (les fonctions discursives maîtrisent l'avancement du discours sous-jacent au processus de résolution et elles s'adressent au référent). Nous considérerons dans le premier cas le langage comme outil de construction et de maîtrise de la pensée en nous appuyant sur la théorie de Vygotsky, de Jakobson et de Duval, tandis que, dans le deuxième cas, nous considérerons le discours par rapport à son référent au moyen des modes d'expansion discursives.

CHAPITRE III

PROBLÉMATIQUE ET MÉTHODOLOGIE

0. Introduction

L'objectif de ce chapitre est d'abord de reprendre la problématique de notre recherche dont les éléments ont été dégagés au fur et à mesure du développement du chapitre précédent. Ensuite, nous présenterons la méthodologie que nous adopterons pour notre recherche. Cette méthodologie, sur la base de l'hypothèse que l'avancé de la résolution du problème passe par l'évolution du mode d'expansion du discours et par le changement de la valeur des propositions[1] devrait nous fournir des éléments de réponse aux questions de recherche :

- Quels sont les processus de changement de la valeur des propositions ?
- Quelles sont les fonctions du langage qui favorisent le changement de la valeur des propositions ?

1. Synthèse de la problématique

Résumons le sujet de ce travail :

Notre recherche vise étudier la dialectique entre le figural et le théorique dans une situation de résolution d'un problème de géométrie plane conduite par un binôme d'élèves. De façon particulière, nous sommes intéressés aux allers et retours entre l'appréhension opératoire du dessin et l'évocation d'un référent théorique particulier dans une théorie donnée (dans le cas, la géométrie euclidienne). La perspective adoptée consiste à analyser cette dialectique du point de vue du langage naturel. En d'autres termes, nous chercherons à mettre en évidence le rôle d'outil joué par le langage lors de la résolution d'un problème de démonstration en géométrie plane. Nous développerons une **analyse fonctionnelle** du langage, d'un point de vue peu développé à ce jour, par la recherche en didactique.

[1] D'une valeurs épistémique sémantique au valeur logique de la proposition.

L'objectif de notre étude s'appuie sur les hypothèses de recherche suivantes :

HR1 : Le langage naturel joue le rôle de médiateur dans les relations entre appréhension opératoire du dessin et référent théorique, et à cette fin exerce des fonctions favorisant l'avancement de la résolution.

HR2 : Le langage d'un sujet joue aussi un rôle de révélateur des opérations cognitives du sujet: il sera utilisé par le chercheur pour mettre en évidence les fonctions d'aide à l'avancement du processus de résolution.

HR3 : L'avancement dans la résolution d'un problème se réalise par une progression dans les modes d'expansion discursive : le sujet passe d'un mode d'expansion discursive simple comme l'accumulation, au mode d'expansion discursive plus complet comme la substitution. Cette évolution passe par le changement de la valeur des propositions : d'une valeur liée au contenu de la proposition, à une valeur liée au statut de la proposition.

Les hypothèses de recherche énoncées ci-dessus s'appuient toutes sur l'hypothèse de travail selon laquelle

HT : Le travail par binôme des élèves favorise l'activité de communication constituant l'objet d'étude.

2. Le choix de la méthode : une situation d'observation de résolution de problème

La méthode choisie pour répondre aux questions de recherche consiste à observer un processus de résolution de problèmes de démonstration en géométrie plane par des élèves. Les problèmes choisis pour l'expérimentation sont différentes versions d'un même problème, obtenues en jouant sur les valeurs de certaines variables, par exemple les définitions des quadrilatères concernés, certaines propriétés du même quadrilatère ou la forme du problème (énoncé ou liste de données accompagnées d'un dessin). Pour une description détaillée nous renvoyons au chapitre IV.

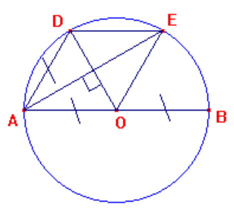
L'observation sera centrée sur l'activité de communication (principalement verbale) entre les élèves pendant le processus de résolution. Afin de favoriser l'activité de communication, l'expérimentation prévoit que les élèves travaillent par binôme. Il ne s'agit pas donc d'une ingénierie didactique, car la situation ne consiste pas en une situation d'enseignement – apprentissage, mais simplement d'une situation d'observation. Nous nous appuyons sur l'idée

formulée par Beaudichon (1999), et reprise dans le Chapitre II, selon laquelle la communication favorise la conceptualisation : c'est justement grâce à l'interaction verbale que s'effectue un avancement sur le plan cognitif.
L'observation nous permettra de repérer les processus de résolution et leur évolution. À partir de là, nous chercherons à reconnaître et décrire les fonctions du langage en tant qu'outil pour l'avancement du processus de résolution. Notre attention se portera aussi sur le rôle des interactions langagières entre les élèves pour l'avancement dans la résolution, avancement qui s'accomplit par exemple, grâce à un passage d'une valeur épistémique sémantique à une valeur opératoire des propositions énoncé pendant l'interaction langagière.

3. Modèles d'analyse des protocoles

Le modèle d'analyse des protocoles est constitué de deux parties, l'une pour l'analyse des fonctions du langage par rapport au sujet, l'autre pour l'analyse des fonctions discursives par rapport au référent. Pour cette dernière analyse nous adopterons la classification des modes d'expansions discursives accumulation et substitution définis par Duval (1995), tandis que pour la premier analyse nous dégagerons des autres modèles que nous définirons dans ce chapitre. En effet, nous nous proposons de dégager deux types de modèles : l'un qui nous permettra de partager les protocoles en *Unités de base* (« Démarche de résolution et ses diversions »), et l'autre qui nous permettra d'identifier la démarche du changement de la valeur des propositions lorsque la résolution est issue du dessin ou de la question du problème (Mécanismes).
De façon générale, le modèle « Démarche de résolution et ses diversions » consiste à interpréter le discours des élèves comme un enchaînement de question et de construction de réponses aux questions.
Avant d'introduire la définition de ce modèle, présentons certains aspects importants par un exemple d'analyse du déroulement d'un exemple de protocole.

<u>Exemple d'un processus de résolution</u>



Problème 1

Soit (C) un cercle de centre O et de diamètre [AB], D un point de ce cercle tel que [AD] = [AO]. La perpendiculaire à (OD) passant par A recoupe le cercle (C) au point E.
Démontrer que OADE est un losange.

Discours des élèves	Commentaires
43. K : déjà on sait que les diagonales AE et OD du	(43) Appréhension discursive du dessin sur la base des

quadrilatère sont perpendiculaires 44. J : et alors ?	données de l'énoncé. En effet, les segments AE et OD sont des objets géométriques qui prennent leur signification en relation au quadrilatère OADE en devenant « les diagonales du quadrilatère ». Les diagonales sont nommées (opération de désignation d'une fonction référentielle, Duval, 1994, p.92) . Cela permet d'évoquer le théorème (intervention 45)
45. K : <u>si les diagonales du quadrilatère sont perpendiculaires et elles se coupent dans leur milieu, c'est un losange</u>	(45) Le théorème, explicité en termes géométriques de façon complète, permet de distinguer ce qui relève du statut opératoire des données de ce qui relève du statut opératoire de la conclusion. Les hypothèses doivent être toutes vérifiées pour qu'on puisse appliquer le théorème. Pour cela, la recherche des propriétés géométriques ou des relations géométriques demandées dans les hypothèses, sera interprétée en termes de **Questions** Les questions auxquelles il faut répondre sont alors : Q_1 : les diagonales sont-elles perpendiculaires ? Q_2 : les diagonales se coupent-elles en leur milieu ?
46. J : Les diagonales sont perpendiculaires c'est bon, c'est dans les données. Maintenant il faut prouver qu'elles se coupent dans leur milieu	(46) Pour la réponse à la Q_1, que nous allons appeler R_1, il suffit de revenir à l'énoncé : « les diagonales sont perpendiculaires » est une des données de l'énoncé. Par contre, la construction de la réponse R_2, passe d'abord par la définition de deux sous questions (SQ)[2] implicites (elles ne sont pas explicitées par les élèves en termes géométriques) : $SQ_{2/1}$: [AE] coupe [OD] en son milieu $SQ_{2/2}$: [OD] coupe [AE] en son milieu

Ce qui suit, montre une Diversion par rapport à l'objectif de construire des réponses pour les questions Q_1 et Q_2. Plus en détail, la Diversion (de l'intervention [107] à l'intervention [114]) consiste à abandonner momentanément la construction de la réponse à $SQ_{2/2}$
Des questions et sous-questions sans fonction utile à la résolution seront enchaînées.

Diversion 107.K : mais attends, ils sont équilatéraux *(les triangles OAD et ODE)*, regarde! Parce que ça c'est un rayon *(AO)*, ça c'est un rayon *(OE)* et ça c'est égal au rayon (*DO = OA = AD)* et celui là… je ne sais pas… <u>DE il faudrait le prouver aussi.</u> Parce que dans un losange les quatre cotés sont égaux. On peut essayer de prouver ça aussi.	(107) <u>La **question Q_3** est maintenant « prouver que DE est égal aux autres cotés ».</u> L'appréhension opératoire des triangles équilatéraux, l'appréhension discursive pour le triangle ADO et l'explicitation en termes géométriques des relations parmi les cotés permet d'évoquer le théorème « un losange est un quadrilatère ayant les cotés égaux » **Construction de la réponse R_3 :**
108.J : déjà on a OE = AO = AD = OD car AO et OD sont des rayons donc ils sont égaux 109.J : et AD égal AO comme c'est marqué 110.K : AD est égal OA … <u>DE il faudrait le prouver,</u> ça serait pas mal de le prouver	(110) Reprise de la question Q_3

[2] La marque SQ a été choisie pour rappeler le termes « sous-question »

ça serait pas mal de le prouver 111.J : OE c'est aussi un rayon, puisque E appartient à C, c'est marqué là et O c'est le centre du cercle	
112.K : voilà c'est bon, maintenant il faudrait DE, mais c'est sûr que <u>c'est un triangle</u> <u>équilatéral mais comment prouver ça?</u>	(112) Appréhension opératoire du triangle DEO. Dans le domaine d'interprétation du dessin, on tire les informations que DEO est équilatéral. **La sous-questions SQ_3** est de « prouver que DEO est équilatéral »
113.K : ODE est équilatéral mais...	
114.K : et voilà c'est sûr mais il faudrait prouver que celui il est égal à ceux-là *(DE égal à EO et DO)*, ces deux là sont des rayons *(EO et OD)* donc ils sont forcement égaux mais….	(114) Appréhension opératoire
Silence Attends ces deux là sont parallèles, DE est parallèle à AO On est parti par l'histoire d'angle…*(intervention 84)*	L'appréhension perceptive du dessin permet de dire que DE est parallèle à AO
Fin de la Diversion Remarquons qu'il n'y a pas la réponse R_3 à la question Q_3. Nous n'avons pas à présenter une raison pour ce fait, mais nous pouvons quand même avancer des hypothèses à ce propos. Nous pouvons donc supposer que la démonstration de l'égalité des segments DE, OE et OD en tant que côtés du triangle DEO n'est pas évidente pour les élèves qui doivent utiliser la théorie des transformations. La reprise de la construction de la réponse à Q_2 signale la fin de la diversion.	
[Continuation de l'intervention 114] L'angle DAI et IAO sont égaux comme ça on sait que ça coupe au milieu *(AE coupe DO en son milieu)*, il nous manque un angle… Comme DA est égal à OA, DAO est un triangle isocèle. Puisque AE coupe perpendiculairement OD alors AE est la hauteur du triangle OAD. Mais la hauteur dans un triangle isocèle est aussi la médiane et la médiatrice, donc AE coupe OD en son milieu	Les élèves reviennent à nouveau sur la sous-configuration du triangle OAD. Le point I est un élément ajouté par rapport à l'intervention (46), désignation du point I d'intersection des diagonales AE et OD . **Réponse $R_{2/1}$ à la $SQ_{2/1}$**
Les élèves discutent sur comment rédiger ce résultat	
130.K : AE coupe OD dans son milieu I, et perpendiculairement, on sait que I c'est bien le milieu de OD	
131.J : on sait que I c'est bien le milieu de OD,	(131) Explicitation de la $SQ_{2/2}$ qui n'était pas faite en (46)

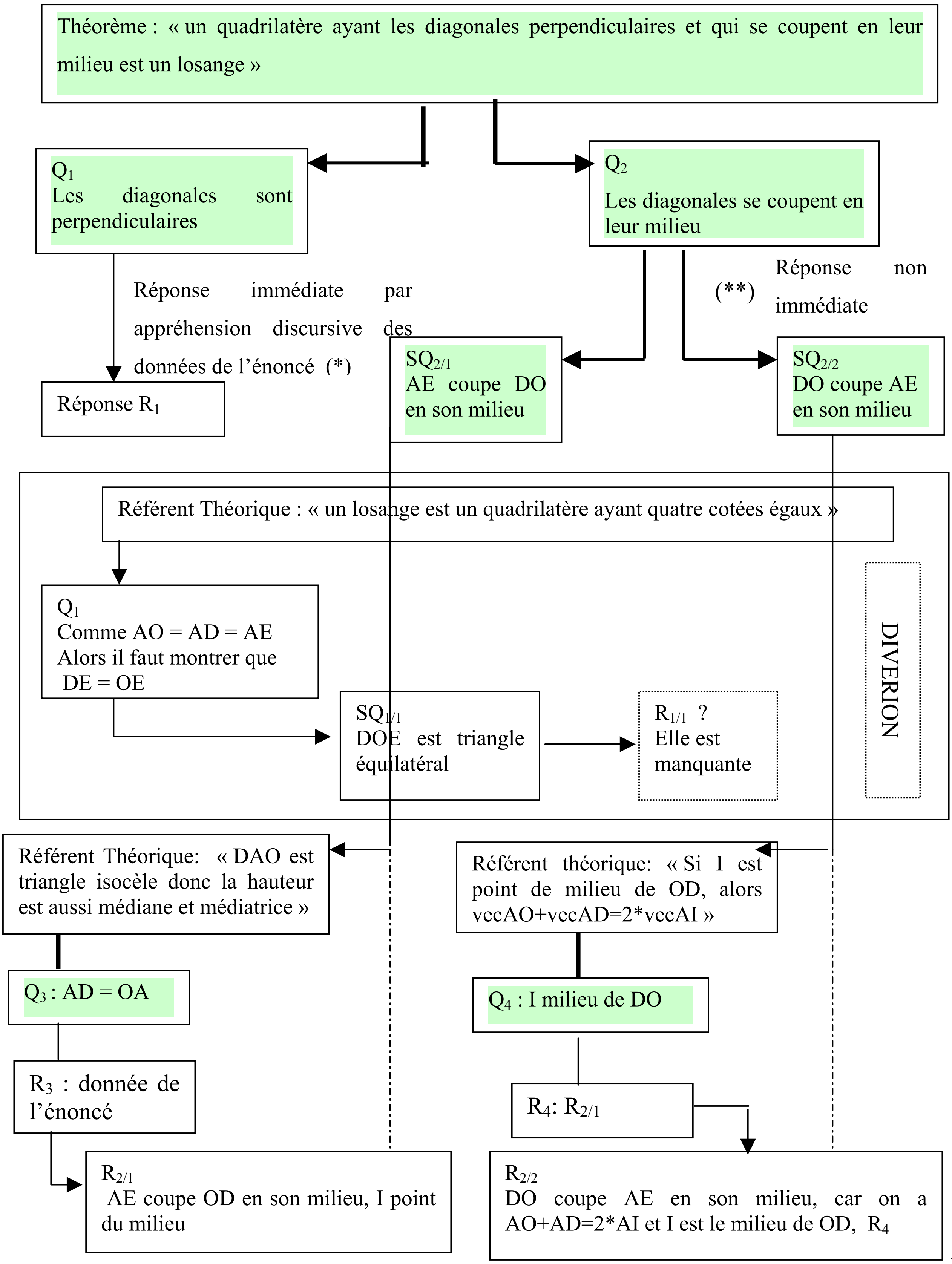
maintenant <u>il faut prouver</u> que c'est…. <u>que I c'est bien le milieu de AE.</u>	(46).
………………	
140.J : non, mais regarde <u>il faut prouver que c'est 2* AI donc que ça</u> *(le point I)* <u>c'est le milieu</u>	(140) Transformation de la $SQ_{2/2}$ dans le domaine d'interprétation du dessin ($\overrightarrow{AE} = 2 * \overrightarrow{AI}$)
141.K : bien oui, c'est bon on sait que, <u>regarde</u> AO plus AD c'est égal à deux AI donc c'est vrai	(141) Relation entre les vecteurs AO, AD et AI Le verbe « regarder » souligne que les élèves sont en train de travailler dans le domaine d'interprétation du dessin
142.K : donc en fait comme on a trouvé que I c'était le milieu de DO et sur notre cours, sur *les vecteurs* on a marqué que AO plus AD c'est égal deux AI 143.J : attends, à condition que I c'était le milieu	*(142) Référence Théorique* : Par appréhension opératoire du dessin, évocation du théorème à partir de la configuration ci-dessus décrite (que nous appellerons dans ce qui suit configuration étiquette, voir chapitre suivant) et la relation parmi les segments
144.K : bien oui, c'est ce que j'ai dit "*on sait que I c'est le milieu de….", donc maintenant on sait que* AO plus.. *vecteur AO plus vecteur AD c'est égal à deux fois vecteur AI* ça nous arrange comme I c'est le milieu de OD bien AI est égal IO. Bon tu marques Et après bon, on a fini	(144) Verbalisation complète du théorème qu'il faut utiliser pour répondre à la $SQ_{2/2}$
150.J : "donc AO + AD = 2 * AI = AE donc AI = la moitié de AE, <u>I milieu de AE</u> 151.K : voilà	(150) Réponse $R_{2/2}$
152.J: alors un quadrilatère….. Un quadrilatère dont les diagonales sont perpendiculaires et se coupent en leur milieu est un losange	**(152) Réponse finale** sur la base du théorème explicité en (45)

L'extrait de protocole ci-dessus, vise à donner un exemple d'un enchaînement de questions, sous-questions et réponses en tant que modèle d'analyse des protocoles.

Comme le montre l'analyse de cet exemple de protocole, le théorème évoqué constitue une base pour le chercheur pour identifier les questions auxquelles les élèves cherchent à répondre même si elles n'apparaissent pas de façon explicite. En effet, les hypothèses du théorème seront interprétées en termes de questions car il faut d'abord se demander si elles sont toutes vérifiées afin de pouvoir appliquer le théorème. La réponse à la question peut être immédiate ou non immédiate : elle sera immédiate s'il n'est pas besoin de décomposer la question en sous-questions pour passer à la réponse (*, voir schéma suivant), tandis qu'elle sera non immédiate dans le cas contraire (**).

Le schéma suivant représente l'enchaînement de questions et réponses par lequel nous modéliserons le processus de résolution du problème proposé lors de l'expérimentation. Dans ce schéma est aussi inclus un exemple de Diversion (définition détaillée dans le paragraphe suivant) en tant que phase où le processus de résolution s'éloigne de la démarche centrale.

Schéma 1



3.1 Démarche de résolution, questions, réponses et diversions

Sur la base de l'exemple présenté ci-dessus, nous définirons le modèle « Démarche de résolution » et les « Diversions » par lesquels seront segmentés les protocoles d'observation.

3.1.1 Caractérisation de la Démarche de résolution

La « *démarche de résolution* » consiste en la reconstruction, par le chercheur, d'un enchaînement séquentiel des questions et sous questions, que se sont posés les sujets lors de la résolution, et des réponses qu'ils ont données.

Nous décidons que les questions sans contribution apparente à la réponse finale constituent des « Diversions ».

La Démarche de résolution est donc un enchaînement d'unités de base tel que :

Q : Question $\longrightarrow$ **CR** : construction de la réponse $\longrightarrow$ **R** : réponse

L'*Unité de base* est constituée par la séquence non nécessairement connexe : Question, Construction de la réponse, Réponse. Elle peut être constituée de parties non connexes en particulier parce que séparées par des diversions.

Il s'agit maintenant de répondre aux questions : « quelle est l'origine des Questions ? En quoi consiste la construction des réponses ? »

Venons donc à l'origine des Questions. Tout d'abord il faut souligner que la formulation de la Question peut ne pas être le résultat d'un processus intentionnel, mais son origine est facilement identifiable, soit dans l'appréhension opératoire du dessin, soit dans la question du problème ou dans les sous-questions obtenues par la transformation de la question même (cela sera traité dans les paragraphes suivants). La formulation de la question, qu'elle soit explicite ou implicite, assigne à la proposition qui l'exprime la valeur logique « Indéterminé » et elle constituera en ce moment l'énoncé cible[3] à prouver. Ce modèle nous permettra donc d'identifier les objets de la communication fixés par les sujets lors du déroulement du processus de résolution.

Venons maintenant à la phase de Construction de la réponse. L'objectif de la construction de la réponse pour les élèves est de récupérer un/des théorème(s), connu(s), qui soit utile pour aboutir à la réponse car la réponse ne peut être obtenue qu'à l'issue d'une déduction. Si la

[3] Nous utilisons l'expression « énoncé cible » au sens de Duval, (1994) : « Enoncé cible » est une proposition ayant le statut opératoire de conclusion désirée.

formulation de la question n'est pas le résultat d'un processus forcement intentionnel, la construction de la réponse, en revanche, est le résultat d'un processus intentionnel de recherche du référent théorique nécessaire pour la résolution du pas de déduction.

3.1.1 Caractérisation des diversions

Les « *diversions* » sont des phases où le processus de résolution s'éloigne de la démarche de résolution car il met en jeu un enchaînement de questions et éventuellement leurs réponses qui ne servent pas de façon directe la résolution.

3.2 Les constructions d'un enchaînement de questions et réponses

Si la Démarche de résolution et ses diversions permettent de partager les protocoles en unités de base en identifiant des énoncés cibles à prouver (Q), des démarches de construction d'une réponse (CR) et la réponse (R) à la question, **les Mécanismes permettront de décrire les processus à l'origine des questions et les processus de construction des réponses** sur la base des allers et retours entre le registre figuratif et le registre langagier et sur la base du changement de la valeur des propositions énoncées. Pour chaque énoncé cible Q (par exemple, une prémisse d'un théorème à vérifier), la construction de la réponse à cette question peut être centrée ou non sur le dessin. Dans le cas où la construction de la réponse à la question cible démarre sur le dessin, nous utiliserons le « Mécanisme dessin » pour la décrire. En revanche, si la construction de la réponse ne démarre pas sur le dessin, alors nous utiliserons le « Mécanisme énoncé » pour la décrire.

3.2.1 Mécanisme centré sur le dessin

Ce mécanisme décrit un certain type de déroulement d'une unité de base (question, construction d'une réponse, réponse) **à partir de l'appréhension opératoire sur le dessin**. Il est composé de quatre étapes :

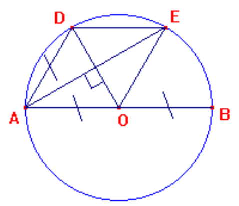
1. L'appréhension perceptive du dessin (construit ou donné avec l'énoncé du problème) permet aux élèves de **reconnaître des unités figurales qui seront ensuite organisées en sous-configurations** par appréhension opératoire du dessin (qui va modifier de façon optique, physique ou positionnelle les unités figurales). Les unités figurales sont donc des gestalts de dimension inférieure à celle de la sous-configuration (dimension 2)

2. Une fois fixée une sous-configuration, on passe à la description des relations entre les unités figurales en termes géométriques.

Mais, en quoi consiste l'expression « en termes géométriques » relatifs aux relations entre les unités figurales ? En référence aux propositions ci-dessus, l'expression « en termes géométriques » est caractérisée par le fait que les unités figurales sont reconnues (et d'habitude sont aussi nommées) comme des objets géométriques liés à d'autres éléments de la sous-configuration: par exemple, les segments perpendiculaires sont nommés « AE » et « OD » (en lien avec leurs points extérieurs) et ils sont identifiés en tant que *diagonales* du quadrilatère OADE. Les segments égaux sont nommés « AO » et « AD » et ils sont repérés comme *côtés* du triangle OAD. De là, il peut alors en découler la propriété que le triangle est isocèle. Il est important souligner que dans ces cas les segments sont nommés, en effet, si une expression reste en termes spatio-graphiques, comme on déjà dit, elle est caractérisée d'habitude par l'emploi de termes utilisés en déictique et par l'absence de dénomination des unités figurales. Mais quelle valeur possèdent alors les propositions exprimant en ternes géométriques les relations entre les unités figurales?

Comme Duval le souligne, une des grandes difficulté de la construction des pas de déduction d'une démonstration géométrique, est la nécessité de passer d'une valeur épistémique sémantique au statut opératoire d'une proposition. Cette difficulté est d'autant plus forte que la valeur épistémique correspond à une évidence perceptive, donnée par le dessin. La valeur épistémique sémantique est alors fortement associée par les élèves à la valeur logique «vrai».

Dans le Problème 1 proposé au paragraphe « Extrait d'un protocole », parmi les sous-configurations que les élèves peuvent reconnaître et isoler sur le dessin, on peut distinguer ainsi le quadrilatère OADE ayant les diagonales perpendiculaires, le seul quadrilatère OADE, deux triangles OAD et ODE, deux triangles AOE et ADE…



Dans cette phase exploratoire, les relations entre les unités figurales sont exprimées en termes spatio-graphiques et elles sont tirées notamment du domaine d'interprétation du dessin[4] (Laborde& Capponi, 1994). Par exemple on pourra reconnaître ce processus d'interprétation dans des expressions telles : « Ce segment est perpendiculaire à celui-là », « ça est égal à ça ». La progression du discours se fait par juxtaposition de propositions indépendantes et le passage d'un énoncé à l'autre dépend de leur contenu. Ici les propositions n'ont qu'une valeur liée au contenu, et elles n'ont pas de statut opératoire sinon de portée locale au cas où une proposition est tirée par inférence. La valeur assignée à ces propositions par l'émetteur ou le récepteur est une valeur épistémique sémantique induite par le contenu même des propositions. En reprenant Duval (1995) : « une proposition qui est évidente par la

[4] « …toutes les propriétés spatiales du dessin ne peuvent être interprétées comme renvoyant à des propriétés de l'objet [géométrique], au dessin est attaché un domaine d'interprétation » (Laborde& Capponi, 1994, p. 172)

seule compréhension de son contenu ou par une procédure complémentaire de constatation visuelle ("ça se voit sur le dessin") est automatiquement vraie. Elle n'a donc pas à être prouvée… » (Duval, p. 229).

Les deux propositions : « ce segment et ce segment sont égaux » et « ce triangle est isocèle » possèdent une valeur épistémique car les élèves peuvent leur associer une valeur « vraie », mais les propositions, n'étant liées l'une à l'autre, ne possèdent pas de statut jusqu'au moment où elles deviennent hypothèses ou conclusions, par exemple lorsqu'une est déduite de l'autre.

Le mode d'expansion discursive est donc ici de type « accumulation », les phrases s'ajoutant les unes aux autres sans respect d'aucune règle d'ordre sinon celle d'un lien sur leur contenu respectif.

3. L'ensemble des informations recueillies et l'explicitation des relations géométriques rend possible **l'évocation d'un théorème** (énoncé ayant un statut théorique) utile à la résolution du problème et appartenant au système de connaissances des élèves. On considère que le langage remplit alors une **fonction d'association** (association entre les informations recueillies et le théorème).

Deux remarques peuvent être avancées à ce moment. La première concerne une question de recherche: « Comment ou pourquoi l'expression en termes géométriques des informations recueillies permet-elle l'évocation du théorème ? »

C'est justement la réponse à cette question qui constitue un des objectifs de notre recherche. Nous essaierons de fournir la réponse à la question dans l'analyse a posteriori de notre expérimentation.

La deuxième remarque concerne la « fonction d'association » du langage. Conformément aux hypothèses évoquées à plus reprises, nous admettrons tout d'abord qu'il existe une fonction d'association du langage permettant d'évoquer un référent théorique à partir d'un ensemble d'informations exprimées en termes géométriques. Il semble être légitime, en conséquence, de postuler l'existence d'informations particulières dans l'ensemble des informations recueillies exprimées par des mots particuliers qui rendent compte de cette capacité d'évocation. Bien évidemment il faudra valider l'existence de tels mots « déclencheurs ». L'analyse des protocoles nous permettra en outre de caractériser de manière détaillée cette fonction d'association.

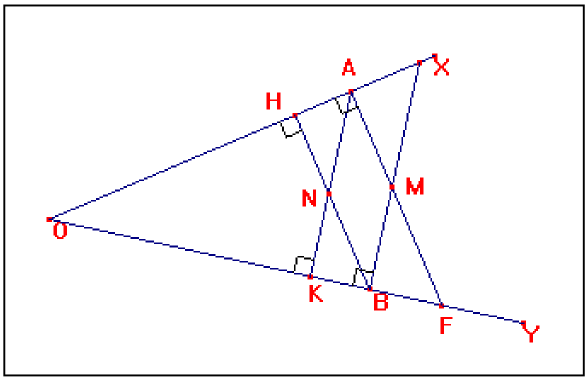
4. On revient donc à l'appréhension opératoire sur le dessin afin de chercher les relations géométriques définies par les hypothèses manquantes du théorème évoqué. Cette

appréhension opératoire se déroule différemment de celle décrite à l'étape 1, car la structure du théorème fonctionne comme « guide » pour la recherche sur le dessin : on considère que le langage remplit une **fonction de guide** grâce à la structure imposée du théorème.

C'est à cette étape du mécanisme que les diversions peuvent apparaître au cas où le langage ne joue plus un rôle de guide. En effet, il peut arriver que le domaine spatio-graphique soit dominant par rapport au domaine théorique dans cette phase de résolution. Dans ce cas, la fonction de guide du langage fait défaut. Le point d'ancrage pour la guide de l'appréhension opératoire du dessin, constitué du statut des propositions imposé par l'énoncé, a disparu. C'est pourquoi l'appréhension opératoire du dessin, qui n'est pas guidée par un but précis (reconnaître les relations exprimées dans les hypothèses manquantes) peut déboucher à nouveau un recueil d'informations qui peut provoquer le retour au début d'un nouveau cycle de mécanisme : évocation d'un théorème (différent du précédent), construction d'une réponse, recherche des hypothèses manquantes. Or, si l'application de ce second théorème est moins coûteuse que celle du début du processus, alors ce dernier mécanisme devient le mécanisme principal, sinon cette phase est complètement abandonnée devenant ainsi une diversion, et on revient sur le processus central.

Nous montrerons dans ce qui suit comment peut se développer a priori le fonctionnement d'un mécanisme centré sur le dessin pour la résolution du problème indiqué ci-dessous.
Nous présenterons alors trois tableaux, dans lesquels figurent trois solutions possibles : une solution qui peut se développer davantage en Italie, car les critères d'isométrie sont mis en place, une solution qui peut se développer davantage en France, car les transformations sont mises en place et finalement une solution qui a des chances de se développer à la fois en Italie et en France car elle met en jeu des connaissances communes. Ainsi, nous montrerons que le savoir influe sur l'appréhension opératoire du dessin et, vice-versa que l'appréhension opératoire du dessin exerce de l'influence sur les référents théoriques évocables.
On mettra du même coup en évidence comment les fonctions du langage peuvent agir.

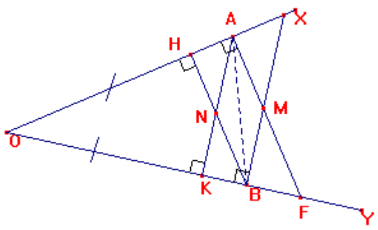
<u>Problème 2</u>



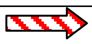
Soit XOY un angle ; sur les cotés OX et OY on considère deux segments [OA] et [OB] tel que OA= OB. La perpendiculaire à (OX) passant par A et la perpendiculaire à (OY) passant par B se coupent au point M. La perpendiculaire à (OY) passant par A et la perpendiculaire à (OX) passant par B se coupent au point N.

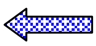
Montrer que le quadrilatère AMBN est un losange.[5]

Les tableaux ci-dessous sont composés de quatre colonnes : dans la première figurent les données de l'énoncé; dans la deuxième colonne, les sous-configurations possibles obtenues par l'appréhension opératoire du dessin à partir de ces données; dans la troisième colonne, les prémisses (informations) recueillies par l'appréhension opératoire et perceptive correspondantes du dessin ; enfin, dans la quatrième colonne, certains des théorèmes évocables grâce aux prémisses recueillies et utiles pour la résolution. Seuls certains d'entre eux devront être verbalisés pour être utilisés de façon correcte.



Dessin relatif au processus de résolution présenté au Tableau 3.1. Cette solution qui peut se développer davantage en Italie

 Passage qui correspond à la définition d'une question, processus qui n'est pas nécessairement intentionnel sauf dans la résolution d'un expert.

 Passage qui correspond à la phase de construction d'une réponse. C'est un processus intentionnel.

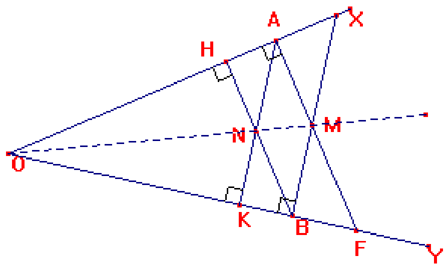
[5] Les points H et K sont ajoutés dans le dessin pour faciliter l'explication du déroulement du processus de résolution

Tableau 3.1

Données	Sous-configurations	Prémisses	Théorèmes évocables
[BO] = [OA] →	*Modification du dessin par ajoute du trait [AB] ϟ *Appréhension opératoire du triangle BOA →	Le triangle BOA est isocèle L'angle∠OAB est égal à l'angle ∠OBA	1) Les cotés d'un triangle isocèle sont isométriques
(AK) ⊥ (OB) (BH) ⊥ (OA)	*Appréhension opératoire des triangles rectangles AKB et BAH →	Les triangles rectangles AKB et BAH sont isométriques	2)Deux triangles rectangles sont isométriques s'ils ont respectivement égaux un côté et un angle
(MB) ⊥ (OB) (MA) ⊥ (OA)	*Appréhension opératoire des angles ∠MAB et ∠MBA par différence des angles MAO et BAO et des angles MBO et ABO	Les angles MAB et MBA sont égaux	3) Angles obtenus par différence entre angles congruents sont congruents
	*Appréhension opératoire du triangle BMA →	Le triangle BMA est isocèle, BM = MA	1')Les angles adjacents à la base d'un triangle isocèle sont égaux
	*Appréhension opératoire du quadrilatère AMBN avec la diagonale BA **Fonction de guide du langage** • Afin de récupérer la prémisse manquante « diagonale bissectrice » Appréhension opératoire de la sous-configuration : droites parallèles coupées par une transversale. Les droites (BN) et (AM) parallèles ayant comme transversale la droite (BA) • Afin de récupérer la prémisse manquante « parallélogramme » Appréhension opératoire du quadrilatère AMBN	**Fonction d'association du langage** ∠MAB = ∠ABH donc la diagonale BA est bissectrice de l'angle en B •[BM]⊥[BO] et[AN]⊥[BO], donc **[BN]//[MA]** • [BN] ⊥[AO] et [MA] ⊥[AO] donc **[BN]//[MA]**	3)Un <u>parallélogramme</u> dont une <u>diagonale est bissectrice d'un angle</u> est un losange 4)Un quadrilatère ayant les côtés opposés parallèles deux à deux, est parallélogramme.

On peut raisonnablement prévoir que seulement le théorème 3 devra être verbalisé pour être utilisé de la façon correcte. En effet, les théorèmes 1, 2,1' et 4 sont plus faciles à utiliser car ils font partie du système de connaissances des élèves depuis le collège, tandis que le théorème 3 apparaît plus tard dans le programme scolaire. Cependant on ne peut pas exclure que la verbalisation d'un théorème, soit-il appartenant au programme du lycée au du collège, doit s'accomplir lorsqu'il n'est pas une connaissance acquise par l'élève résolvant.

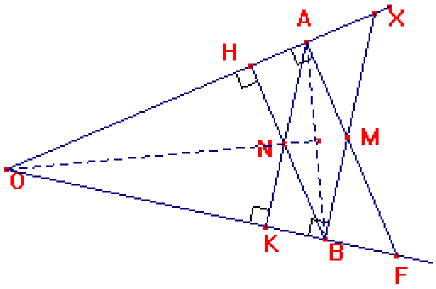
Evidemment, le théorème 3 n'est pas l'unique théorème qui permet d'aboutir à la solution. À sa place, par exemple, on peut évoquer le théorème « Un parallélogramme ayant les quatre cotés égaux est un losange ». Mais il est évident que le théorème évoqué conditionne la façon de manipuler le dessin, donc l'appréhension des sous-configurations isolées sur le dessin même.



Dessin relatif au processus de résolution présenté au Tableau 3.2. Cette solution peut se développer davantage en France

Tableau 3.2

Données	Sous-configurations	Prémisses	Théorèmes évocables
[BO] = [OA]	*Modification du dessin par ajoute de la bissectrice de l'angle XÔY	[OX] →[OY] A→ A' ∈ [OY] Donc A' =B A→B	1) Symétrie axiale d'axe la bissectrice de l'angle XÔY 2)Les symétries conservent les distances, les angles et l'alignement donc : - l'image d'une droite est une droite - l'image d'un segment est un segment de même longueur
(MB) ⊥ (OY) (MA) ⊥ (OX)	* Sous-configuration de l'angle XÔY avec sa bissectrice comme axe de symétrie	(MB) → (MA) donc M = S(M) N = S(N) M∈bissectrice de XÔY N∈ bissectrice de XÔY Donc(MN)≡bisse.XÔY	3) L'image d'un point M de Δ par la symétrie d'axe Δ est le point M lui-même
	* Sous-configuration du quadrilatère AMBN avec sa diagonale MN	Le point A est symétrique du point B par rapport à (MN)	4) Un quadrilatère dont deux sommets sont symétriques par rapport à une des diagonales, est un losange.



Dessin relatif au processus de résolution présenté au Tableau 3.3. Cette solution peut se développer en Italie et en France

Tableau 3.3

Données	Sous-configurations	Prémisses	Éorèmes Évocables
[BO] = [OA]	* Appréhension opératoire du dessin qui permet d'isoler la sous-configuration du triangle BOA	Le triangle BOA est isocèle	1) Les cotés d'un triangle isocèle sont isométriques
(AK) ⊥ (OY) (BH) ⊥ (OX)	* Appréhension opératoire du dessin qui permet d'isoler la sous configuration du triangle isocèle avec les hauteurs BH et AK	N orthocentre de OBA	2) Le point d'intersection des hauteurs d'un triangle est appelé Orthocentre
		Donc (ON) ⊥ (AB) ON est médiane	3) Dans un triangle isocèle, la hauteur est aussi médiane et médiatrice
		NA = NB	4) Un parallélogramme ayant deux côtés consécutifs égaux est un losange

3.2.2 Mécanisme centré sur l'énoncé

Ce mécanisme décrit le déroulement d'une unité de base (question, construction d'une réponse, réponse) **à partir de l'énoncé**, en particulier**, de la question du problème,** ou **à partir d'une question (énoncé cible)**. Le mécanisme est composé de quatre étapes :

1. **La question du problème**[6] **(ou une question-cible) et les données de l'énoncé permettront aux élèves d'évoquer le théorème utile pour aboutir à la réponse**. Par exemple, en revenant au Problème 1, au moyen d'une proposition comme : « Ah oui, on avait un théorème sur les diagonales du losange….». Le théorème est à cette étape juste évoqué mais il n'est pas verbalisé.

[6] La question du problème joue le rôle d' «énoncé cible » au sens de Duval (1994).

2. **Le théorème**, pour être utilisé de façon correcte, **est verbalisé de façon complète** et cela est possible uniquement si le théorème est une connaissance *disponible* pour les élèves. Le théorème ainsi verbalisé, permet de distinguer ce qui relève du statut opératoire d'hypothèse de ce que relève du statut opératoire de la conclusion.
Par exemple, en revenant au Problème 1, le théorème est verbalisé au moyen d'une proposition comme : « Pour avoir un losange il faut un quadrilatère ayant les diagonales perpendiculaires qui se coupent en leur milieu ».

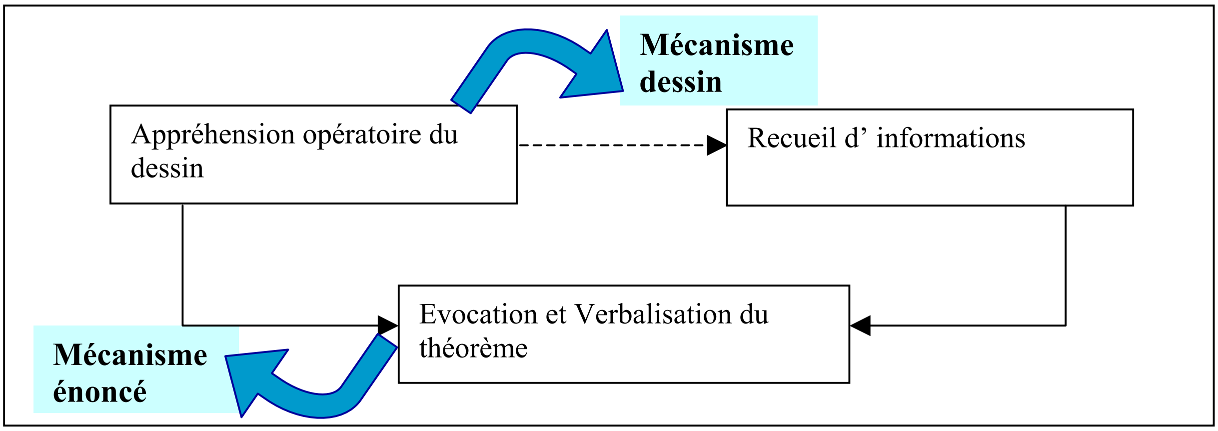
3. Les relations géométriques exprimées par les propositions du théorème sont reconnues sur le dessin grâce à l'appréhension opératoire : il faut reconnaître les propriétés exprimées dans les prémisses du théorème comme relations géométriques entre éléments d'une sous-configuration du dessin. Il nous paraît qu'ici le langage peut exercer une **fonction de guide** pour l'appréhension du dessin. Lorsque le langage n'exerce pas une fonction de guide, les diversions sont possibles.

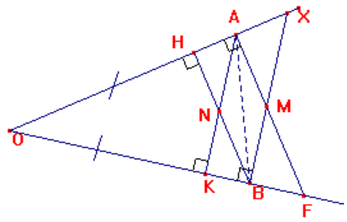
4. On revient à cette étape, au théorème en récupérant le statut opératoire des assertions qui expriment les propriétés géométriques reconnues sur le dessin : elles assument le statut d'hypothèses et permettent d'appliquer le théorème évoqué à l'étape 1

Avant de présenter l'analyse d'un processus de résolution d'un problème à l'aide du mécanisme énoncé, nous fournirons un schéma cyclique (schéma 2) permettra de décrire entièrement le processus de résolution. Ce schéma permettra de mettre en évidence les critères adoptés pour la définition des mécanismes : reconnaître les relations entre le domaine théorique et domaine graphique, de façon particulière les relations entre l'appréhension opératoire du dessin et le référent théorique engagées lors d'un processus de résolution et définir le rôle joué par le langage en ces allers et retours.
Il est raisonnable penser que le processus de résolution soit abordé par l'appréhension opératoire du dessin à partir de laquelle l'élèves recueil un ensemble d'informations. Les informations recueillies lui permettrons d'associer d'abord, et de verbaliser en suite, le théorème utile pour la résolution du problème posé. La verbalisation de l'énoncé du théorème permettra de reconnaître les prémisse du théorème qu'il faut prouver. On revient donc sur le dessin afin de chercher les relations géométriques requises dans les prémisses et seulement celles-ci.
Nous reconnaissons dans le cycle les deux différents mécanismes, Mécanisme dessin et

Mécanisme énoncé, selon que le processus de résolution démarre respectivement par l'appréhension opératoire du dessin ou par la verbalisation du théorème.

Schéma 2





L'exemple du Tableau 3.4, relatif au Problème 2, montre un cycle du type qu'on vient de décrire

Tableau 3.4

Données	**Théorèmes évocables**	**Prémisses**	**Sous-configurations**
Question : « montrer que le quadrilatère est un **LOSANGE** »	1)Un <u>parallélogramme</u> ayant <u>deux côtés consécutifs égaux</u> est un losange **Fonction d'association du langage** **Fonction de guide du langage**		
(AF)⊥ (OX) (BM) ⊥ (OY)	1/1)Un quadrilatère est un parallélogramme si <u>les angles aux sommets opposés sont égaux</u>	Les angles ∠OAM et ∠OBM sont droits. Donc l'angle ∠OAM= l'angle ∠OBM	Appréhension opératoire de l'angle ∠NAM et de l'angle ∠NBM Appréhension opératoire des angles ∠OAM et ∠OBM
[BO] = [OA]	Les angles à la base d'un triangle isocèle sont égaux	Le triangle BOA est isocèle L'angle ∠OAB est égal à l'angle ∠ABO	Modification du dessin par ajout du trait AB Appréhension opératoire du dessin qui permet d'isoler la sous-configuration du triangle BOA.

	Angles obtenus par différence d'angles égaux sont égaux	L'angle $\angle$**NAM est égal à l'angle** $\angle$**NBM**	
			Appréhension opératoire du dessin qui permet d'isoler : - le triangle ANB - le triangle AMB ↓
	Les angles alternes internes issus d'une droite transversale par rapport à deux droites parallèles, sont égaux	L'angle $\angle$NAB est égal à l'angle $\angle$ABM	Appréhension opératoire du dessin qui permet d'isoler les droites parallèles (AN) et (BM) coupées par la transversale (AB)
	Les angles alternes internes issus d'une droite transversale par rapport à deux droites parallèles, sont égaux	L'angle $\angle$MAB est égal à l'angle $\angle$NBA	Appréhension opératoire du dessin qui permet d'isoler les droites parallèles (BN) et (AM) coupées par la transversale (AB)
	II Critère d'isométrie des triangles	Les triangles BNA et AMB sont isométriques car ils ont un côté en commun et les angles adjacents sont égaux ↓ L'angle ANB et l'angle AMB sont égaux	
	Le point d'intersection des hauteurs d'un triangle est appelé orthocentre	Le point N est l'orthocentre du triangle isocèle BOA ↓ NA = NB Donc le parallélogramme a deux côtés consécutifs égaux. Il est un losange	Appréhension opératoire du triangle isocèle BOA

3.2.3 Conclusion

Les deux types de mécanismes dégagés dans ce qui précède seront utilisés dans l'analyse des protocoles, pour décrire le processus de résolution et pour identifier de façon précise le rôle du langage dans l'avancée du problème et les fonctions qu'il exerce.

3.3 Analyse des fonctions discursives par rapport au référent

3.3.1 Introduction

En accord avec l'hypothèse déjà formulée, l'avancée de la résolution du problème peut passer par le déplacement d'un mode d'expansion discursive plus usuel comme celui de l'accumulation, au mode d'expansion discursive spécifique aux mathématiques comme la substitution.
Cette considération s'appuie sur un cadre théorique de type psychologique et didactique, mais aussi sur un cadre linguistique et en particulière sur la notion d'unité linguistique définie par Bronckart.
Dans ce qui suit nous proposerons de réutiliser pour notre étude la liste d'unités linguistiques fournie par Bronckart. Mais, pour fournir les caractérisations de l'accumulation et de la substitution, nous associerons aux unités linguistiques leur propre usage, ainsi nous clarifierons l'usage des unités linguistiques à l'intérieur de notre recherche.

3.3.2 Caractérisation de l'accumulation

Selon la théorie de Duval, le mode d'expansion discursive « accumulation » comprend l'argumentation, l'explication, la description en tant que modes d'expansion qui ne participent pas d'un enchaînement déductif construit par substitution. Or sur la base des usages spécifiques des unités linguistiques, nous définirons l'expansion discursive « accumulation » en tant que simple juxtaposition de propositions relevant d'informations utiles pour la résolution. Ces informations peuvent être obtenues par l'interprétation du dessin ou des pas de déduction de portée locale. L'accumulation n'exclut donc pas des pas de déduction, mais elle ne participe pas d'un enchaînement de pas de déduction (recyclage des propositions).
On remarque aussi que l'expansion discursive accumulation peut participer ou non d'un but précis défini par la question du problème. Cela signifie que le mode d'expansion discursive accumulation participe d'un mécanisme dessin ainsi que d'un mécanisme énoncé. L'accumulation concerne le simple recueil d'informations reconnaissable comme une juxtaposition d'informations indépendantes lorsque l'accumulation participe d'un mécanisme dessin, tandis que l'accumulation concerne la recherche d'informations guidée par la question

du problème lorsqu'elle participe d'un mécanisme énoncé. Alors, la modalité du recueil des informations sera de deux types différents :

- soit on recueille des informations relatives au losange, par exemple, en produisant une description du losange même (et non une définition du losange) : il y aura des informations qui seront utilisées en suite, mais d'autres qui ne seront pas utilisées dans la résolution (Mécanisme centré sur le dessin).
- soit on définit les conditions nécessaires et suffisantes pour répondre à la question du problème (par exemple, « pour avoir un losange il faut dire que les diagonales du quadrilatère se coupent en leur milieu et perpendiculairement », les conditions nécessaires et suffisantes pour avoir un losange sont alors qu'il a les diagonales perpendiculaires et qui se coupent en leur milieu). Le recueil d'informations sera donc guidé par la recherche de toutes les informations nécessaires et suffisantes et seulement celles-là (Mécanisme centré sur l'énoncé).

3.3.3 Caractérisation de la substitution

Selon Duval, la substitution est un mode de progression du discours qui porte sur un recyclage de propositions : la conclusion d'un pas de déduction dévient prémisse pour le pas suivant. Cette progression s'appuie sur une démarche que, à partir des données de l'énoncé du problème, permet de fournir la réponse finale. Donc, la substitution est un mode de progression du discours qui porte sur un ordre non modifiable de la progression des propositions.

3.3.4 Usages des unités linguistiques

L'idée de caractériser différentes typologies de discours sur la base de la fréquence et du fonctionnement d'unités linguistiques dans les textes, est à la base du travail de recherche du psycho-linguiste Bronckart qui, dans « Le fonctionnement des discours » (Bronckart, 1985) fournit un modèle théorique mettant en relation la présence et la fréquence de diverses unités linguistiques avec les conditions de production de textes. Il fournit une « grille d'analyse de textes destinée à préciser, à opérationaliser et à quantifier les unités linguistiques caractéristiques de différentes catégories de textes » (Bronckart, p.61). Selon l'hypothèse de Bronckart « à des conditions de productions différentes, […] devraient correspondre des types de textes différents et (qu')idéalement les caractéristiques des conditions de production devraient permettre de prévoir les caractéristiques morphosyntaxiques du texte » Donc, le modèle proposé par Bronckart fonctionne selon une orientation dans le sens « catégories de textes » vers « unités linguistiques », et il postule que « l'existence d'une telle corrélation

signifierait aussi, inversement, que la présence d'une certaine configuration d'unités linguistiques plus ou moins spécifiques permettrait d'attribuer un texte, à un certain type, sans se référer à son contenu sémantique ». Le dispositif défini par Bronckart lui permet « d'analyser le fonctionnement dans différents textes d'unités linguistiques choisies en fonction des opérations langagières dont elles seraient la trace en surface » (Bronckart, p.67).
Il met donc en relations la présence et la fréquence d'unités linguistiques, les conditions de productions et les typologies de textes.

Unités linguistiques conditions de production

Typologies de textes

Sur la base de ce modèle nous allons considérer le discours des élèves conduit pendant la résolution du problème comme une typologie particulière de texte.
Bronckart définit trois situations d'énonciation, ou typologies de textes : Discours en situation (DS), Discours théorique (DT) et Narration (N).

Le Discours en situation (DS) est défini comme le

> « Texte produit en relation directe avec le contexte, en particulier avec des interlocuteurs identifiables, un moment et un lieu d'énonciation précis, et qui s'organise par référence permanente au contexte ; Dans sa forme extrême, le DS est un dialogue à propos d'états ou d'évènements présents dans le contexte d'énonciation » (Bronckart, p.63).

Le Discours théorique (DT) est

> « produit lui aussi avec une référence au contexte, mais résultant d'un effort d'abstraction par rapport à ce dernier, ce discours se caractérise par son indépendance à l'égard d'une situation d'énonciation particulière. Bien qu'il ait été destiné à un moment et à un endroit donné, par un auteur-locuteur, et qu'il soit destiné à un public-interlocuteur, ce type de texte se définit par son absence presque complète de référence aux paramètres énonciatifs. Dans sa forme extrême, il se présente sous la forme d'un discours scientifique, vrai partout et toujours, pour n'importe quel interlocuteur ».

Enfin, « la narration se différencie des deux types de discours précédents par le fait qu'elle entretient une relation de médiation avec la situation d'énonciation, cette médiation se traduisant par la création d'une origine à partir de laquelle les événements narrés s'organisent dans le successif ».

Les textes qui ont été l'objet de l'analyse de Bronckart, s'appuient pour la plupart sur : pièces de théâtre, interviews, reportages radiophoniques, dialogues tirés d'un récit, romans divers. Les textes considérés comme théoriques étaient extraits d'ouvrages scientifiques. Or, la situation que nous analyserons prend en compte des dialogues entre pairs, à propos d'un contenu particulier les mathématiques. De façon spécifique, la situation concernera la résolution d'un problème de démonstration en géométrie plane réalisé par un binôme d'élèves. La situation ne rendra pas compte d'une situation d'enseignement – apprentissage. Nous analyserons la transcription des dialogues des élèves et leur production de preuve écrite. Il semble être évident qu'un tel type de situation ne rentre pas dans la définition d'un discours de Narration, tandis qu'elle peut être considérée comme concernant un *discours théorique en situation*. Un discours théorique, puisqu'il est demandé aux élèves de fournir une preuve écrite du processus de démonstration qui doit être conduite sur la base d'une théorie (dans le cas spécifique la théorie de la géométrie euclidienne), et aussi elle est un discours en situation par les caractéristiques mêmes de l'acte de production : il est produit en relation directe avec l'interlocuteur, dans un moment et un lieu précis (l'expérimentation a lieu dans une salle du bâtiment scolaire des élèves), et il est organisé en référence permanente avec l'espace d'interaction sociale (le binôme d'élèves, l'observateur et le but de l'expérimentation) et de la notion (le référent, le signifiant ou le signifié selon le cas). Notre situation relèvera donc des caractéristiques d'un discours en situation et, en même temps, d'un discours théorique au sens de Bronckart. Il s'agit alors d'un discours qui n'est pas décrit par Bronckart, c'est pourquoi nous ne retiendrons pas la caractérisation des textes qu'il fait en s'appuyant sur les seules occurrences des unités linguistiques.

Alors que l'objectif de Bronckart est de distinguer parmi différentes typologies de textes au moyen des unités, le nôtre est de considérer le discours théorique en situation et son avancement dans les modes d'expansion discursive. Nous ne postulerons pas une relation biunivoque entre la présence de certaines unités linguistiques et les différents types de discours, dans certains cas, nous pourrons même associer une même unité linguistique à différents modes d'expansion discursive du discours. Nous chercherons plutôt à caractériser un mode d'expansion discursive par l'usage des unités linguistiques qui y est fait.

3.3.5 Liste des unités linguistiques

Comme déjà dit, nous allons prendre en charge un « discours théorique en situation ». Nous supposons que les unités linguistiques participant du discours, sont à la fois celles qui caractérisent le discours en situation et celles qui caractérisent le discours théorique issu de

Bronckart. À la liste fournie par Bronckart (1985, pp. 74, 75) d'unités linguistiques relatives à ces deux types de discours, nous ajoutons d'autres unités linguistiques participant habituellement du discours de résolution d'un problème de démonstration en géométrie plane.

Nous chercherons donc à établir a priori des usages d'unités linguistiques caractérisant le mode d'accumulation et des usages d'unités caractérisant le mode substitution.

3.3.6 Les unités linguistiques et leur usage dans le mode d'expansion discursive accumulation

Venons en d'abord à la liste d'unités linguistiques que nous associerons ensuite au mode d'expansion discursive accumulation en définissant leur usage spécifique.

Les unités linguistiques considérées sont les suivantes :

Les conjonctions telles : « et, ou…. ». Mots qui servent à réunir des propositions de même nature (conjonctions de coordination) ou à relier une proposition subordonnée à une principale (conjonction de subordination, telle « parce que »)

Les termes utilisés en déictique tels « ça, celui-là,… » accompagné par les gestes ;

Les pronoms « je », « nous » « on » (avec l'acception nous);

Les connecteurs « si…alors », « donc », « donc forcement », « comme »… ;

Les termes mathématiques tels le nom de certains polygones (parallélogramme, triangle,…), des éléments de la figure c'est-à-dire, gestalts de dimension inférieure à figure même tels hauteur, médiatrice, médiane ;

Les adverbes temporels ;

Les verbes renvoyant à la perception tels : « regarder, voir » ou encore « déplacer » par exemple, déplacer la figure par rapport à ce position sur la feuille;

Les modalités « falloir, devoir » ;

Les modalités d'énoncés « certainement, forcement, nécessairement, probablement, sans doute » ;

Les désinences verbales *présent, passé composé, futur simple* et *conditionnel*. L'auxiliaire d'*aller* et des modes *vouloir*, *devoir* et *falloir* ;

Les phrases non déclaratives (quand, pourquoi, où, comment) ;

De la définition même d'accumulation, la suite d'informations est construite à l'aide de *conjonctions* qui permettent d'ajouter une information à l'autre de façon linéaire.

Dans le mode d'accumulation, les *termes utilisés en déictique* « ça », « cela », « celui-ci »… remplacent les nominalisations ou les propriétés géométriques et fonctionnent en mode déictique. Ces termes n'étant pas spécifiques du mode d'accumulation, sont aussi présents dans le mode substitution mais s'y manifestent par un usage différent.

L'emploi du « je » dans le mode accumulation indique l'apparition de l'énonciateur. Au *je* s'ajoute selon la situation un *nous* incluant d'autres acteurs-énonciateurs. Toutefois, cette dernière unité, étant donné ces diverses valeurs, n'est pas spécifique du mode d'expansion accumulation mais caractéristique plus généralement des deux modes d'expansion discursive comme on verra dans ce qui suit.

Les *termes mathématiques* participant d'une expansion d'accumulation, généralement renvoient à l'objet du problème (et non à l'objet théorique générique) et au dessin.

Dans le mode d'accumulation, les *adverbes temporel* tels *« après », « avant »*... assignent un ordre aux informations qui correspond souvent à leur ordre dans le discours.

Les *verbes renvoyant à la perception* sont liés à l'appréhension perceptive du dessin

L'emploi dans l'accumulation des *modalités* « falloir, devoir » est souvent accompagnées par les verbes tels « démontrer, prouver, dire …». Ces modalités ne sont pas spécifiques du mode d'expansion accumulation mais sont aussi présent dans la substitution. Dans le cas de l'accumulation, l'usage de ces modalités est fait pour des raisons de contrat et non pour une nécessité théorique (par exemple, la modalité n'introduit pas la nécessité d'un pas de déduction). Nous pouvons reconnaître cet usage des modalités spécifique de l'accumulation, par la prise en compte de ce qu'il est « tout au tour » de la modalité dans la phrase. Par exemple, par les valeurs assignées au paramètre « référent » de l'espace référentiel, dans la phrase « on **voit** que AO est symétrique à DE [cotés d'un parallélogramme OADE], il **faudra le prouver**… » la modalité n'est pas une nécessité théorique car n'est pas introduite par un théorème de référence mais par une évidence perceptive, elle est alors une nécessité de contrat : n'est pas légitime dire « on voit », le contrat oblige à « prouver » les affirmations.

Les *modalités d'énoncé « certainement, forcement, nécessairement, probablement, sans doute »,* donnent à l'énoncé, lors d'une accumulation, une valeur de certitude, de probabilité ou de nécessité, c'est-à-dire une valeur épistémique sémantique liée au contenu de la phrase.

Les désinences verbales constituantes un sous-système temporel : *présent, conditionnel* et *futur simple*, sont la trace de la relation directe entre le discours et les repères temporels de la situation matérielle de production, ancrage qui fonctionne dans l'accumulation de façon continue dans l'interaction locuteur-interlocuteur(s). C'est par rapport à celle-ci que se situe ainsi l'avant, le pendant et l'après du procès. Le *conditionnel* associé à la modalité *falloir* peut introduire un méta-discours sur le processus de résolution, c'est-à-dire un projet pour réaliser un ou plusieurs pas de déduction sans recyclage des conclusions (propre de la substitution).

Les unités linguistiques *« donc, comme, si ... alors… »* introduisent des relations entre les informations d'une liste. Dans le mode d'accumulation ces relations ne sont des pas de substitution mais elles peuvent être tirées également d'un pas de déduction (une inférence au sens strict) ou du domaine d'interprétation du dessin. Par exemple, de l'interprétation d'un dessin du parallélogramme on peut en tirer l'implication : « si les cotés sont égaux, alors ils sont parallèles ». Cette implication n'est pas le résultat de l'application d'un théorème (énoncé cible), mais elle est tirée simplement par une constatation visuelle sur le dessin.

Dans le cas d'une inférence tirée du dessin, les unités linguistique « si…alors », « donc », « comme »…peuvent être accompagnées par un verbe renvoyant à la perception tel « regarder, voir… ». La phrase suivante en fournie un exemple : « Regarde ! comme les cotés sont égaux, alors ils sont parallèles ».

Dans le mode d'expansion discursive « accumulation », on peut reconnaître l'unité linguistique « si…alors » conversationnel. Par exemple, une phrase du type « si tu fais ceci alors… » montre comment cette unité linguistique peut être employée même dans une situation d'échange conversationnel par un usage particulier. En résumant, dans le mode l'expansion discursive « accumulation », l'unité linguistique « si…alors », ainsi que les unités linguistiques « donc », « comme » …, seront associées principalement à deux modes d'usage de type conventionnel ou de type déduction qui ne consiste pas en une substitution.

Les phrases interrogatives introduites par *pourquoi*, *comment…* tels « pourquoi tu dis ça… » ou « comment tu fais pour savoir que… » s'adressent à l'interlocuteur (et non au référent comme dans le cas des phrases interrogatives lors de la substitution)

3.3.7 Les unités linguistiques du mode d'expansion discursive substitution

Les unités linguistiques caractérisant le mode d'expansion discursive **substitution** prises a priori comme outil pour notre analyse sont :

Les connecteurs « si…alors », « puisque…donc » et les connecteurs synonymes utilisés dans la même structure déductive (si…donc, comme…alors, …donc..)
Les conjonctions « parce que, puisque »
Les adverbes temporels
Les mots utilisés en déictique
Certains termes mathématiques
Les modalités telles : falloir, vouloir, devoir, accompagnées par verbes tels : Démontrer, dire, prouver
Pronom indéfini « on », le pronom « nous »
Verbes : formes passives complètes, non déclaratif

Auxiliaires de vouloir, devoir, pouvoir Futur : Auxiliaires du verbe aller Désinences verbales présent, conditionnel, futur simple

Parmi ces unités linguistiques il y en a certaines qui ne sont pas communes à la liste fournie pour caractériser le mode accumulation. C'est l'objet du paragraphe suivant.

3.3.7.1 Unités linguistiques spécifiques de la substitution

Pronom indéfini « on », le pronom *« nous »*. Ils indiquent un énonciateur universel, représentant anonyme de la communauté scientifique qui participe de l'espace d'interaction sociale et de l'espace de l'acte de production : la classe, la communauté mathématique, les deux élèves…

3.3.7.2 Unités linguistiques qui ne sont pas spécifiques de la substitution et leurs usages dans le mode substitution

Dans le mode substitution l'usage des *connecteurs* « si…alors », « donc »…signalent la présence d'un pas de déduction.
Les *conjonctions* « parce que, puisque …» servent pour introduire une justification au pas de déduction. En particulier elles peuvent servir pour introduire le théorème qui légitime le pas de déduction.
Les *adverbes temporels* expriment l'ordre dans lequel s'effectuent les opérations de substitution.
Les *termes « ce », « cela »*... servent pour exprimer de façon condensée plusieurs données. Ils fonctionnent en mode anaphorique. Ils sont utilisés dans des pas de déduction dont les prémisses ont été déjà explicitées et qui sont, par exemple, trop nombreuses pour être encore toutes exprimées sans perdre le fil de l'enchaînement de substitution, comme le montre la phrase suivante : « si ça c'est vrai, alors… »
Certains *termes mathématiques*, comme par exemple les mots « polygones », « parallélogramme », « losange »…renvoient à des objets théoriques et non à des objets du problème.
Les *modalités* telles : *falloir, vouloir, devoir*, accompagnées par verbes tels : *démontrer, dire, prouver* sont utilisées dans le mode substitution pour une raison théorique, et non pour une raison de contrat comme dans le mode d'accumulation. Pour cela elles relèvent d'un projet relatif à l'enchaînement de pas de substitution.
La désinence verbale *présent,* se détache généralement de l'espace temporel de l'énonciation car l'expansion discursive de la substitution constitue son propre espace temporel. Les

occurrences de ces unités linguistiques prennent une valeur atemporelle traduisant le caractère universel du fait prouvé. Mais, à l'intérieur de la substitution, ces désinences verbales imposent un ordre aux pas de déduction ; cela veut dire que ces unités linguistiques révèlent de l'ordre non modifiable des propositions dans la substitution.

À cette étape, nous avons défini pour chaque mode d'expansion discursive, une liste d'unités linguistiques et les descriptions de leurs usages. Dans la suite, nous essayerons de relier les différents usages des unités linguistiques aux modes d'expansion discursive. De cette façon nous devrions arriver à définir des critères utilisables dans l'analyse des protocoles, qui nous permettrons de reconnaître les différents modes d'expansion discursive sur la base des différents usages des unités linguistiques. Donc, les critères de discrimination entre les modes d'expansion discursive ne seront pas la présence des unités linguistiques, quant plutôt leur usage.

3.3.8 Tableau 3.5 : Usages des unités linguistiques dans l'accumulation

À l'aide des distinctions faites dans les deux paragraphes précédents, nous présentons ci-dessous les usages prévus a priori des unités linguistiques dans les modes accumulation

Tableau 3.5

	unités linguistiques de ACCUMULATION (description, argumentation, explication)	**Modes d'utilisations des unités linguistiques**
Simple juxtaposition de propositions portant sur des informations obtenues par appréhension perceptive du dessin	« si…alors »	Conversationnel
	conjonctions	Expriment la juxtaposition de propositions, et donc d'informations, en imposant un ordre linéaire aux informations
	Adverbes temporels	Expriment la juxtaposition des informations dans l'ordre de leur recueil
	Mots utilisés en déictique	Remplacent dénomination ou propriétés géométriques
	Termes mathématiques	Renvoient à l'objet du problème et au dessin
	Verbes renvoyant à la perception	Pour centrer l'attention sur le dessin et sur l'objet du problème

Les informations sont obtenues aussi par: **1)Inférences tirées du dessin (interprétation du dessin)**	« si…alors » (donc, comme…) forcement Modalités telles : falloir, vouloir, devoir. « il faut que… Il est certain que... il me semble que… je crois que…, évident que…probable que…possible que » Modalité d'énoncé (adverbes ou locution) : certainement, forcement, nécessairement, probablement, sans doute. Verbes renvoyant à la perception Temps verbal : présent indicatif	« mise en relations » Elles sont utilisées pour des raisons de contrat (c'est-à-dire qu'elles n'ont pas une raison d'être de type théorique) Ils donnent à l'énoncé une valeur de certitude, de probabilité ou de nécessité. Pour tirer les informations du dessin
2)Pas de déduction sans que soit employée le recyclage des propositions	« si…alors » Mots utilisés en anaphore Modalités telles : falloir, vouloir, devoir. Accompagnées par verbes tels : Démontrer, dire, prouver Phrases non déclaratives (quand, pourquoi, où, comment)	Déduction Condensent plusieurs données pour ne perdre pas le fil du raisonnement déductif. Ils renvoient à ce qui a été déjà dit Elles sont utilisées par nécessité théorique. Présence d'un énoncé cible ou de la construction d'un énoncé cible

3.3.9 Tableau 3.6 : Usages des unités linguistiques dans la substitution

À l'aide des distinctions faites dans les deux paragraphes précédents, nous présentons ci-dessous les usages prévus a priori des unités linguistiques dans les modes substitution

Tableau 3.6

	unités linguistiques de SUBSTITUTION (raisonnement déductif)	**Modes d'utilisations des unités linguistiques**
Recyclage des propositions : la conclusion d'un pas de déduction dévient prémisse pour le pas suivant	« si…alors » Adverbes temporels Termes mathématiques Modalités telles : falloir, vouloir, devoir. Accompagnées par verbes tels : Démontrer, dire, prouver Pronom indéfini « on », « nous » Verbes : formes passives complètes, non déclaratif Auxiliaires de vouloir, devoir, pouvoir Temps : futur, conditionnel et présent	Déduction Expriment une séquence d'informations Renvoient à l'objet théorique Elles sont utilisées pour nécessité théorique. Locuteur/interlocuteur universel

4. Conclusion

Les modes d'expansion discursives sont retenus dans notre recherche comme révélateurs de l'avancement du processus de démonstration. L'usage de certaines unités linguistiques permet de repérer les modes d'expansion discursives dans le cas où les marques linguistiques plus importantes qui caractérisent un mode sont absentes. Par exemple, lorsqu'on n'a pas de subordonnées du type « si…alors », « comme... donc » dans le mode substitution.

Généralement, le croisement de l'usage des unités linguistiques qui occurrent et des certaines caractéristiques des modes d'expansions (par exemple, la juxtaposition de propositions indépendantes pour l'accumulation ou la présence de recyclage pour la substitution) constitueront les critères sur la base desquels nous qualifierons l'expansion du discours de type accumulation ou de type substitution.

CHAPITRE IV

ANALYSE A PRIORI DE LA SITUATION EXPÉRIMENTALE

0. Introduction

L'objectif de ce chapitre est de présenter l'analyse a priori de notre expérimentation conduite sur la base des hypothèses de recherche et des hypothèses de travail exposées au chapitre III. Cette analyse sera abordée d'un point de vue global par la description du contexte de l'expérimentation, puis nous dégagerons les questions de la définition de la situation expérimentale et des variables choisies pour la mettre au point. Enfin, il sera procédé à l'analyse de traitements possibles des problèmes par les élèves.

1. Contexte de l'expérimentation

Rappelons que l'objectif de notre recherche est d'analyser comment la verbalisation agit sur la relation entre appréhension opératoire et appréhension discursive lors de la résolution d'un problème de géométrie plane. L'analyse du *discours* produit par le binôme d'élèves en train de résoudre le problème est donc centrale. Or, comme nous l'avons remarqué au Chapitre II, le discours objet de l'analyse est issu de l'échange communicatif principalement verbal entre les élèves et dépendant du contexte situationnel où il se produit (cf. paragraphe 2.du chapitre II).

Ce contexte dépend de certaines entités extra-langue, dégagés par Bronckart (1985) qui conditionnent l'activité langagière et qui sera considéré lors de l'analyse a priori. Ces entités, retenues dans notre cadre théorique, sont représentées par des paramètres définissant *l'acte de production* et *l'acte d'interaction sociale*.

1.1 Définition des paramètres des actes de production et d'interaction sociale

La définition du contexte passe par les définitions de l'espace de l'acte de production et de l'espace de l'interaction sociale. Ainsi, seront attribués des valeurs aux paramètres *locuteur*, i*nterlocuteurs* et *espace temps* du discours pour définir l'espace de l'acte de production, et des valeurs aux paramètres *lieu social*, *destinataire*, *énonciateur* et *but* pour définir l'espace de l'interaction sociale de notre expérimentation.

Le choix de ces valeurs répond évidemment aux objectifs de la recherche. L'acte de production est caractérisé par le fait que les élèves travaillent par binômes. Ce choix est dicté par un double objectif : d'une part rendre nécessaire la communication entre les élèves (nécessité de communiquer le processus de résolution à autrui, de partager les stratégies…), d'autre part de rendre le processus de résolution explicite et évident afin de recueillir des observables (le discours enregistré sera transcrit et constituera la base de notre analyse). En nous appuyant sur l'idée de la nécessité de prendre en considération la dimension sociale de l'apprentissage[1] (construction du savoir dans l'interaction), nous pouvons raisonnablement prévoir que l'interaction entre les élèves pourra favoriser le processus de la solution à un problème de géométrie plane.

Nous assignerons aux élèves des binômes le rôle de locuteur (producteur) ou d'interlocuteur (coproducteur) selon qu'ils prennent ou non la parole à un moment donné. Les positions respectives de locuteur et interlocuteur sont donc définies par la seule situation de communication et non par le contenu de l'échange.

La valeur que nous attribuons au paramètre « espace-temps » est la suivante : l'*espace*, où a lieu l'expérimentation n'est pas la salle de classe mais une salle de l'établissement scolaire des élèves. Ce qui est plus important est que l'expérimentation est menée en Italie et en France. Le choix d'expérimenter dans deux pays différents est issu d'une interrogation sur l'incidence de l'institution sur le processus de résolution.

Nous faisons en effet l'hypothèse que les référents théoriques géométriques différents dans les deux institutions scolaires française et italienne et que les processus de résolution des élèves seront influencés par ces référents.

Un objectif du travail consiste à identifier et délimiter cette influence.

La valeur du paramètre *temps* est double : l'une qui se réfère au niveau d'étude, l'autre qui se réfère au temps de l'expérimentation. La valeur du temps scolaire dépend de l'age des élèves et donc des programmes scolaires. L'expérimentation est mise en place dans des classes correspondantes aux classes de Seconde et Première, françaises et des classes de la deuxième année du lycée en Italie (élèves de 14-15 ans). Ce choix conditionne l'influence de la variable institutionnelle. En effet, le programme scolaire français, au moment de l'expérimentation,

[1] C. Laborde « Deux usages complémentaires de la dimension sociale dans les situations d'apprentissage en mathématiques », *Après Vygotsky, à Piaget*

fait appel à la géométrie des transformations tandis que le programme italien fait appel uniquement à la géométrie euclidienne. Donc, la valeur du paramètre « temps scolaire» dépend de l'âge des élèves et de leur pays d'appartenance. Pour fixer certaines variables que nous ne retenons pas comme fondamentales pour notre analyse, nous avons choisi de conduire notre expérimentation face à des élèves ayant à peu près le même âge [2]. De cette façon, il reste associé au paramètre « temps scolaire » la seule variable « programme scolaire » relevant de la variable large qualifiée d'institutionnelle. La deuxième valeur que le paramètre « temps » peut prendre est relative au temps mis à disposition pour l'expérimentation. Ce temps permet de former une mémoire plus ou moins longue de ce que les élèves ont fait pendant le processus de résolution du problème proposé. Le temps long permet surtout à l'interaction sociale de s'établir et de jouer un rôle non négligeable sur le processus de résolution.

Venons maintenant à la définition de **l'espace d'interaction sociale** en assignant à ses paramètres les valeurs qui définissent l'expérimentation.

Le *lieu social* de l'expérimentation est représenté par le binôme d'élèves. Chaque binôme résoudra de façon indépendante le problème proposé.

Lors d'une telle situation d'expérimentation, le *destinataire* implicite auquel est destinée la production des élèves consiste pour les élèves en la représentation sociale qu'ils se font de l'observateur. L'observateur est celui qui propose les problèmes aux binômes d'élèves et qui reçoit les solutions. Dans ce cas spécifique l'observateur est une doctorante qui recueille des données et des observables pour sa recherche. Le choix d'une production des élèves destinée à l'observateur et non à des autres élèves s'appuie sur l'objectif d'analyser le rôle du langage dans des situations proches des situations ordinaires scolaires.

Ainsi, même si les rapports entre l'observateur et les binômes se situent en dehors de la classe de mathématiques, ils mettent en jeu un contrat scolaire car la situation porte sur la demande de résoudre un problème de mathématique, en particulier un problème de démonstration en géométrie plane. La situation est proche de celle définit par Schubauer Leoni (1986) comme « contrat expérimental ».

Cette expérience ne relève pas d'une situation d'enseignement-apprentissage car les connaissances nécessaires pour les traitements des problèmes sont supposées disponibles pour les élèves. Comme on vient de le dire, l'activité se déroulera en dehors de la salle de classe c'est pourquoi les enseignants des mathématiques des binômes ne seront pas présents pendant

[2] Evidemment l'age des élèves peut conditionner leur capacité de verbalisation et leur capacité communicative, mais, à notre avis, la prise en compte de cette variable dépasse le cadre de cette étude.

le déroulement de la situation expérimentale. Le seul adulte présent sera donc l'observateur.
L'*énonciateur* est, dans l'expérimentation, les deux élèves du binôme en jeu.
Finalement le *but,* étant « l'effet spécifique que l'activité langagière est censée produire pour le destinataire », est relatif à la production d'une démonstration dans un problème de géométrie plane. Le but pour les élèves consiste en ce qu'ils perçoivent comme attente de la part de l'enseignant, dans ce cas de l'adulte expérimentateur. C'est pourquoi, nous avons donné aux énoncés des problèmes une forme et un contenu très habituels en nous appuyant sur l'hypothèse que la production des élèves ne sera pas très différente d'une production en classe, la demande ne modifiant guère ce que les élèves ressentent comme attentes.

Il est important de définir aussi les relations au sein des paires énonciateur - destinataire et producteur- coproducteur issues de la théorie de Bronckart. Ce qu'il est important de retenir d'abord est la position d'équilibre ou de non équilibre entre les éléments constitutifs des paires. Les élèves faisant partie de la paire producteur – coproducteur (locuteur- interlocuteur) constituant le binôme sont évidemment en position symétrique (« relation équilibrée », reprenant le terme de Bronckart, p. 34) par rapport à la tâche. Mais, puisque la paire énonciateur-destinataire n'interagit pas si-non dans des cas particuliers dont nous discuterons dans l'analyse des problèmes, nous ne sommes pas intéressés a priori à la position relative des éléments de cette paire.

1.2 Une double dimension sociale

La résolution d'un problème à deux engage une conduite sociale et toute conduite de communication est sociale : la nécessité de communiquer à autrui les choix de méthode ainsi que les stratégies de résolution peut conditionner l'activité de chacun des élèves du binôme. Le caractère social de l'expérience est donc déjà assuré par l'activité de résolution, mais nous prévoyons qu'il sera fortement amplifié par la contrainte d'élaboration à deux d'un seul processus de résolution et d'une seule rédaction de ce processus. « Nous pensons que cette condition contribuera à l'enrichissement des données fournies par l'observation, d'abord parce qu'elle permettra l'extériorisation verbale et gestuelle […] qu'un seul élève aurait peut être eue mais n'aurait pas manifesté ; ensuite parce qu'elle serait un facteur moteur d'évolution dans la réalisation de la tâche » (C. Laborde, 1982, p.222). En outre, l'interaction entre les élèves est rendue particulièrement féconde par la longueur du temps de travail laissé aux binômes qui, comme déjà dit, est environ d'une heure. L'interaction permettra d'extérioriser, grâce aux échanges oraux entre les élèves, leurs opinions, leurs projets, leurs

désaccords….
Nous faisons l'hypothèse que mettre les élèves en conditions de communiquer par le langage naturel ainsi que par le registre figuratif ou sémiotique des gestes, soit un choix pertinent pour entreprendre une analyse fonctionnelle du langage dans la résolution des problèmes de géométrie plane[3].

2. Définition de la situation expérimentale

2.1 Dispositif expérimental

Des groupes de deux élèves (binômes d'élèves producteur-coproducteur), travaillent ensemble à la résolution d'un problème de démonstration en géométrie plane proposé et à la rédaction de sa solution. La situation expérimentale est mise en place en Italie et en France : en Italie, avec des élèves appartenant aux classes correspondantes aux deux premières années du lycée (14/15 ans), tandis qu'en France, avec des élèves appartenant à seule classe de Seconde. Le temps de travail des binômes est suffisamment long (environ une heure) pour permettre une intense activité langagière de verbalisation. Pour l'analyse du discours relatif à l'échange communicatif que les élèves mènent lors de l'activité de résolution, nous avons besoin d'observables, c'est pourquoi le discours est enregistré à l'aide de magnétophones et ensuite, il sera transcrit pour être analysé.
Nous disposerons donc des notes d'observation du travail des binômes, de la rédaction écrite de la résolution des problèmes pour chaque binôme et de la transcription des échanges oraux, issus des enregistrements.
L'activité de chaque binôme se déroule de façon indépendante. Chaque binôme s'engage dans la résolution d'un ou, au plus, de deux problèmes. Pour la résolution du problème les élèves ont le droit d'utiliser des instruments de construction de dessin tels la règle, l'équerre et le compas.

2.2 Connaissances mobilisées par la situation expérimentale

La situation expérimentale peut être décrite à l'aide de la classification fournie par Vergnaud (1991) à propos des situations face auxquelles le sujet peut être soumis.
Vergnaud distingue deux classes de situations : celles pour lesquelles le sujet dispose des compétences nécessaires au traitement de la situation, et celles pour lesquelles le sujet ne dispose pas de toutes les compétences nécessaires au traitement de la situation. La situation de

[3] Nous analyserons les gestes des élèves lorsqu'ils sont accompagnés par des mots déictiques comme on verra au Chapitre VI.

l'expérimentation, appartient aux « classes des situations pour lesquelles le sujet dispose dans son répertoire, à un moment donné de son développement et sous certaines circonstances, des compétences nécessaires au traitement relativement immédiat de la situation » (Vergnaud, 1991, p. 136). Les connaissances mobilisables[4] pour la résolution des problèmes sont relatives à la géométrie euclidienne (en Italie) et à la géométrie des transformations (en France).

2.3 Choix des problèmes

La situation expérimentale a été conçue en accord avec les hypothèses de recherche avancées aux Chapitres II et III selon lesquelles le langage naturel favorise l'avancement du processus de résolution d'un problème de géométrie plane en établissant en quelque sorte un pont entre l'appréhension opératoire du dessin et le référent théorique choisi dans un certain contexte théorique. C'est pourquoi, nous supposons a priori deux types de processus de résolution: un processus de résolution centré surtout sur l'appréhension opératoire du dessin et un processus de résolution centré surtout sur l'appréhension discursive du dessin. Par exemple, si l'avancement du processus dépend de l'appréhension opératoire du dessin, dans la résolution des problèmes choisis, les élèves auront à isoler des sous-configurations particulières dans le dessin pour pouvoir avancer, tandis que si c'est l'appréhension discursive qui gère l'avancement du processus, les élèves auront à expliciter d'autres propriétés du dessin à partir des propriétés données. Notre objectif est de repérer le rôle du langage sur les choix des sous-configurations ou sur les choix des propriétés déduites à partir des données.
Nous pensons qu'un élément clé susceptible d'influer sur les processus de résolution est la forme dans laquelle les problèmes seront proposés. Les problèmes seront présentés en deux versions différentes : dans un cas, seul l'énoncé du problème sera présenté, tandis que dans l'autre cas, une liste de données accompagnée d'un dessin codé sera fournie.

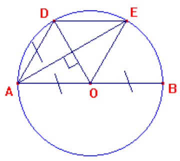
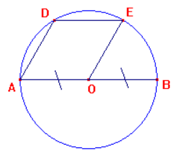
Un problème de géométrie met le plus souvent en jeu deux registres sémiotiques, le registre langagier, et le registre figuratif. La donnée d'un problème de géométrie plane ne relève pas nécessairement des deux registres, cela signifie qu'un problème, par exemple, peut

[4] Précisons les niveaux de mises en fonctionnement des connaissances par les élèves, relativement à un niveau scolaire donné (Robert, 1988, pp. 165-168).
Le *niveau technique* : il implique la mise en fonctionnement d'une connaissance dans des contextualisations simples, locales, sans travail préliminaire de reconnaissance, sans adaptations. C'est le niveau des applications *immédiates.*
Le niveau mobilisable : il implique la mise en fonctionnement d'une connaissance par un début de juxtaposition de savoirs. Ce sont des applications où il faut adapter ses connaissances au contexte particulier. Par exemple par un changement de point de vue ou de cadre mais avec indications (soit données par l'enseignent soit par l'énoncé)
Le *niveau des connaissances disponibles* : ce niveau correspond au fait de savoir résoudre ce qui est proposé sans indications, d'aller chercher soi-même dans ces connaissances ce qui peut intervenir

être donné par la seule paire « énoncé et questions », sans forcément être associé à une représentation figurative (dessin).

Présentons les problèmes proposés aux élèves au cours de cette expérimentation. Ils sont au nombre de trois dont deux sont proposés en deux versions.

Tableau 4.1

Problème	**1**	**2**
A **Énoncé seul**	<u>Problème</u> Soit (C) un cercle de centre O et de diamètre [AB], D un point de ce cercle tel que AD= AO. La perpendiculaire à (OD) passant par A recoupe le cercle (C) au point E. Démontrer que OADE est un losange.	<u>Problème</u> Soit (C) un cercle de centre O et de diamètre [AB]. D et E sont deux points du cercle tels que le quadrilatère AODE soit un parallélogramme. Démontrer que OADE est un losange.
B **Dessin + Liste**	 [AB]diamètre du cercle A, D et E sont des points du cercle (AE) est perpendiculaire à (OD) AO = AD Montrer que AOED c'est un losange	 [AB]diamètre du cercle O centre du cercle AOED parallélogramme Montrer que AOED c'est un losange
	Problème 3	
Énoncé seul	Soient (C) et (C') deux cercles de centres O et O' qui se coupent en A et B. D et E sont les points diamétralement opposés au point A sur les circonférences (C) et (C'). 1) Prouver que les points D, E et B sont alignés. 2) On appelle d la droite qui passe par D, E et B. Prouver que (OO') est parallèle à d.	

Ces problèmes présentent des éléments communs issus de choix expérimentaux faits en fonction des objectifs de notre recherche.

2.3.1 Eléments communs à tous les problèmes

Comme dit plus haut, les problèmes choisis sont tous des problèmes de géométrie plane, où la consigne requise est de « démontrer » ou « prouver » :

- démontrer qu'un quadrilatère donné est un losange (les problèmes A1, A2, B1 et B2)
- prouver que trois points sont alignés
- prouver que deux droites sont parallèles

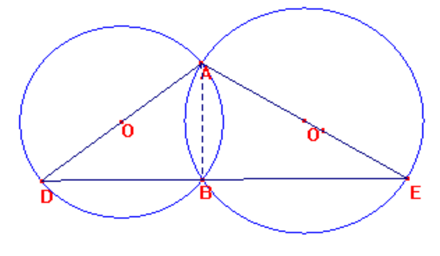
(problème 3)

En outre, les problèmes choisis ne sont pas des problèmes ouverts car nous sommes intéressés à l'interaction verbale, et aux fonctions du langage en ce qu'elles contribuent aux <u>processus d'élaboration de la démonstration</u>. C'est pourquoi nous plaçons les élèves d'emblée dans la recherche de la justification d'une propriété explicite.

Un élément commun aux dessins proposés (problèmes B1 et B2) est la présence du codage[5], c'est-à-dire l'étiquetage par une marque (lettre ou signe) d'éléments du dessin pour mettre en évidence les relations géométriques entre ces éléments. Le critère que nous avons suivi pour coder les dessins consiste à coder les seules informations explicites dans l'énoncé du problème, exception faite pour le codage de l'égalité des rayons AO et OB du diamètre AB puisque ne correspond pas à une information donnée dans l'énoncé. Une des raisons du choix de coder OA et OB tient à ce que sinon le dessin du problème B2 n'aurait eu aucun codage en introduisant ainsi une variable supplémentaire dans la situation et il aurait fallu prévoir d'autres modalités pour le problème 1. Evidemment la résolution des problèmes engagera à la fois l'appréhension opératoire et l'appréhension discursive du dessin mais dans une mesure différente selon le problème.

Ainsi, pour pouvoir avancer dans le processus de résolution, tous les problèmes proposés nécessitent une appréhension opératoire du dessin par des modifications. Rappelons que Duval considère trois types de modifications : les modifications méréologiques (partage d'un dessin en sous-configurations et leur éventuelle recombinaison en un autre dessin), modifications optiques (agrandissement, diminution ou déformation du dessin) et finalement les modifications positionnelles (déplacement de la figure dans la feuille). Tous les problèmes choisis requièrent une appréhension opératoire du dessin pour pouvoir organiser la démonstration et la modification qui est engagée le plus dans la résolution de ces problèmes est principalement celle de nature méréologique. Par exemple dans les problèmes 1 et 2, à un moment donné, un élève pourra isoler la sous-configuration du quadrilatère OADE, passer ensuite à la sous-configuration du triangle isocèle AOE et, enfin, dégager la sous-configuration du cercle pour considérer les segments AO et OE comme des rayons du cercle.

Dessin du problème 3



Dans le problème 3, il est nécessaire d'isoler les sous-configurations triangles rectangles ABD e ABE.

---

[5] En nous appuyant sur la définition proposée par Laborde " Nous entendons ici par codage, les symboles et expressions symboliques extérieurs à la langue naturelle. Nous considérons aussi les lettre désignant les objets mathématiques comme des symboles, puisqu'elles peuvent être utilisées dans des écritures symboliques, telles « M ∈P » ou « a>x ». Le terme codage pourra également désigner l'opération qui à un objet associe un symbole. Le contexte permettra de juger dans quelle acception ce terme est à prendre " (Laborde, 1982, p. 312)

2.3.2 Théorèmes évocables

Comme nous l'avons souligné à plusieurs reprises, les connaissances nécessaires à la résolution des problèmes sont déjà acquises par les élèves. Elles relèvent des théorèmes enseignés. Sur la base de l'hypothèse d'une interdépendance entre l'appréhension opératoire et l'appréhension discursive du dessin, il semble donc pertinent de recenser les théorèmes que les élèves pourraient utiliser lors de la résolution des problèmes. En outre, il nous semble pertinent de relier ces théorèmes avec certaines sous-configurations que les élèves pourraient isoler dans le dessin. C'est pourquoi, nous présenterons dans ce qui suit un résumé, sous forme d'un tableau, de ces liens. Le critère utilisé pour la construction du tableau est le suivant : repérer toutes les sous-configurations possibles dans le dessin et essayer d'associer les théorèmes évocables (non nécessairement utiles à l'avancement de la résolution).

La recherche systématique des sous-configurations à été guidée par l'ensemble relativement restreint des théorèmes évocables c'est-à-dire des théorèmes enseignés. Sont mis en tête les théorèmes dont la conclusion fournie directement la réponse au problème. Nous avons classé les sous-configurations par l'ordre de probabilité décroissant d'apparition, en considérant aussi les sous-configurations qui ne sont susceptibles apparaître que lorsque des sous-configurations ont déjà apparaît.

Tableau 4.2

Problème	Sous-configurations	Théorèmes évocables
A1, B1	Appréhension opératoire du quadrilatère OADE avec ses diagonales perpendiculaires (la relation de perpendicularité entre les diagonales est une donnée de l'énoncé)	Un quadrilatère ayant les diagonales perpendiculaires qui se coupent en leur milieu, est un losange
A1, B1	Appréhension opératoire du quadrilatère OADE avec ses diagonales. Appréhension opératoire d'un triangle, par exemple OAD, ayant comme hauteur une des diagonales du quadrilatère (pour prouver que la diagonale est bissectrice de l'angle au sommet) .	Un parallélogramme ayant une des diagonales bissectrice de l'angle au sommet, est un losange.
A1, B1	Appréhension opératoire du quadrilatère OADE avec ses diagonales. Pour prouver qu'elles se coupent en leur milieu il faudra,	Un parallélogramme ayant les diagonales perpendiculaires est un losange

	par exemple, isoles les sous-configurations des triangles isocèles OAD et AOE (pour prouver que le quadrilatère est un parallélogramme). La relation de perpendicularité entre les diagonales est une donnée de l'énoncé.	
A2, B2	Appréhension opératoire du quadrilatère OADE (par ses côtés uniquement)	Un quadrilatère ayant quatre côtés égaux est un losange
A2, B2	Appréhension opératoire du quadrilatère OADE et du cercle (C)	Un parallélogramme ayant deux côtés consécutifs égaux est un losange
Il y a évidemment d'autres théorèmes ou définitions évocables susceptibles de jouer le rôle d'énoncé tiers lors du processus de résolution. Ils permettent de passer des prémisses à une conclusion mais ils ne relient pas directement les données du problème à la réponse finale.		
A1, B1 A2, B2	Appréhension opératoire du triangle OAD associée à la donnée de l'énoncé AO=AD. Appréhension opératoire du triangle AOE associée à la donnée de l'énoncé « O centre du cercle » De là, l'appréhension opératoire du cercle et des rayons OA et OE	(Définition) Un triangle ayant deux côtés égaux est isocèle
A1, B1	Appréhension opératoire des triangles OAD, DEO ou bien AOE, ADE et du cercle (C) (pour reconnaître les triangles comme isocèles). Traitement du dessin par l'ajoute du point H (intersection des diagonales du quadrilatère) qui permet de reconnaître les hauteurs AH, EH, OH et HD des triangles.	Dans un triangle isocèle la hauteur est confondue avec la médiane et la médiatrice (Réciproque : Si la médiane, la hauteur et la médiatrice d'un triangle sont confondues alors le triangle est isocèle)

	Appréhension opératoire d'un des triangles constituant les sous-configurations du quadrilatère. Traitement du dessin par l'ajout du point H correspondant à l'intersection des diagonales du quadrilatère. Ensuite, modification méréologique par la combinaison de deux de ces triangles	Si dans un triangle la hauteur est confondue avec la médiane et la médiatrice, le triangle est isocèle.
	Appréhension opératoire du triangle OAD et du cercle (C)	(Définition) Un triangle ayant trois côtés égaux est équilatéral
	Appréhension opératoire des triangles OAD et ODE	Un triangle équilatéral a tous les angles de 60°
	Modification méréologique des sous-configurations triangles OAD et ODE	Dans un triangle équilatéral on peut isoler deux triangles rectangles ayant les angles de 90°, 60° et 30°.
A2, B2 A1, B1	L'appréhension opératoire du dessin permet d'isoler les segments AE et OD comme axe de symétrie et les sommets du quadrilatère OADE comme les couples de points symétriques par rapport à ces axes.	Deux points situés à la même distance d'un axe et appartenant à la droite perpendiculaire à l'axe, sont symétriques par rapport à cet axe
	Appréhension opératoire du dessin qui permet d'isoler la sous-configuration cercle	Les rayons du cercle ont tous la même longueur
A1, B1	L'appréhension opératoire du dessin permet d'isoler les sous-configurations des triangles déterminés dans le quadrilatère OADE	Les critères d'isométrie des triangles
A1, B1	Appréhension opératoire du quadrilatère avec ses diagonales. Modifications méréologiques successives pour isoler des triangles ou des couples de points symétriques par rapport aux segments AE ou OD	Un quadrilatère ayant les diagonales qui se coupent en leur milieu est un parallélogramme
A1, B1	Appréhension opératoire du quadrilatère	Un quadrilatère ayant deux

	OADE et du cercle (C)	côtés parallèles égaux, est un parallélogramme.
A1, B1 A2, B2	Appréhension opératoire qui permet d'isoler les droites parallèles (AB) et (DE) et la transversale (AD) ou (OE). De même, l'appréhension opératoire permet aussi de reconnaître les droites parallèles (AD) et (OE) coupées par la transversale (AB) ou (DE).	Deux droites coupées par une transversale sont parallèles si et seulement si les angles alternes internes sont égaux.
A1, B1 A2, B2	L'appréhension opératoire permet d'isoler la sous-configuration du triangle ABE et l'appréhension discursive permet d'en déduire la propriété « être rectangle »	Un triangle inscrit dans un demi-cercle est un triangle rectangle
A1, B1	Appréhension opératoire des sous-configurations du dessin comme triangles	La somme des angles internes d'un triangle est de 180°

L'interprétation du tableau relève plus de sous-configurations pour les problèmes A1 et B1 que pour les problèmes A2 et B2, ce que nous autorise à dire que la version 1 du problème est plus riche en sous-configurations et en théorèmes évocables que la version 2 du problème. Alors, deux conséquences sont possibles :

- soit on a une variété plus grande des stratégies de réponse dans le problème 1 plutôt que dans le 2. En particulier, il semble qu'il n'y a qu'un seul schéma possible de solution correcte dans le problème 2
- soit les élèves risquent d'être moins bloqués dans la recherche des sous-configurations dans le problème 1 que dans le problème 2. On a donc des diversions possibles au cours du processus de résolution du problème 1. Ces diversions seront pour la plupart dans le processus de résolution du problème 1 mais on peut avoir aussi des diversions communes. Par exemple, la sous-configuration du triangle rectangle inscrit dans un demi-cercle, n'est pas utile afin de la solution ni du problème 1 ni du problème 2 (et pourtant, elle peut être isolée dans le dessin du problème 1 ainsi que dans le dessin du problème 2). En revanche, une sous-configuration ayant autant plus de chances d'être isolée dans le dessin du problème 1 que dans le dessin du problème 2, car ici les diagonales ne sont pas tracées, est la sous-configuration du triangle isocèle DEO. Cette sous-configuration peut amener à une diversion car elle met en jeu un

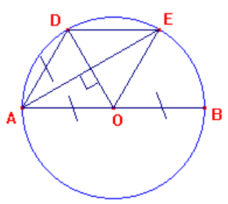
enchaînement de pas de déduction qui ne servent pas de façon directe à la résolution.

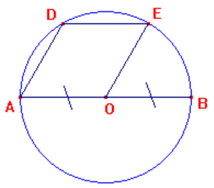
Le tableau suivant vise relier les théorèmes évocables, c'est-à-dire connus des élèves et utiles pour la résolution du problème 3, aux sous-configurations que les élèves peuvent isoler dans le dessin. Le critère utilisé pour la construction de ce tableau est équivalent à celui qu'on a utilisé pour la construction du tableau précédent.

Problème 3	**Sous-configurations**	**Théorèmes évocables**
	Modification du dessin par l'ajout du trait DE Appréhension opératoire du triangle DAE	Aucun théorème n'est évocable à partir de cette sous-configuration
	Modification du dessin par l'ajout du trait AB Appréhension opératoire du dessin qui permet d'isoler les sous-configurations des triangles rectangles ABE et ABD	Le triangle inscrit dans un demi-cercle est un triangle rectangle
	Appréhension opératoire du dessin qui permet d'isoler la sous-configuration des angles ∠ EBA ∠ DBA	La somme de deux angles droits est égal à un angle plat
	Appréhension opératoire du dessin qui permet d'isoler la sous-configuration de la droite DE et des trois points D, B. E sur la droite	Lorsque trois points forment un angle égal à 180°, ils appartiennent à la même droite
	Appréhension opératoire du dessin qui permet d'isoler la sous-configuration de la droite DE	Trois points appartenant à la même droite sont alignés

L'interdépendance entre l'appréhension opératoire et l'appréhension discursive du dessin permet d'aborder l'analyse des théorèmes évocables, par une position symétrique par rapport à la précédente. Nous recenserons les théorèmes que les élèves pourraient utiliser lors du processus de résolution à partir des énoncés des problèmes proposés et non plus des sous-configurations isolées. Le critère utilisé pour la construction du tableau est le suivant : repérer les termes de l'énoncé des problèmes (version A) qui sont susceptibles d'évoquer des théorèmes connus des élèves et utiles pour la résolution ; repérer les termes de la liste des données conjointement aux sous-configurations du dessin (version B) qui sont susceptibles d'évoquer des théorèmes utiles pour la résolution.

Tableau 4.3

Énoncé du problème	Termes de l'énoncé	Théorèmes évocables
A1 : Soit **(C) un cercle** de centre O et de diamètre [AB], D un point de ce cercle tel que **AD= AO**. La perpendiculaire à (OD) passant par A recoupe le cercle (C) au point E. Démontrer que **OADE est un losange.**	« cercle » « OADE losange » « perpendiculaire à (OD) « [AO]=[AD] » « OADE losange » « [AO]=[AD] » « OADE losange »	Les rayons du cercle ont tous la même longueur Un quadrilatère ayant les diagonales perpendiculaires qui se coupent en leur milieu, est un losange Un quadrilatère ayant quatre côtés égaux est un losange Un parallélogramme ayant deux côtés consécutifs égaux est un losange
A2 : Soit (C) un cercle de centre O et de diamètre [AB]. D et E sont deux points du cercle tels que le quadrilatère **AODE soit un parallélogramme**. Démontrer que **OADE est un losange**	« AODE est un parallélogramme » « OADE est un losange »	Un parallélogramme est un quadrilatère ayant les côtés opposés égaux et parallèles. Un quadrilatère ayant quatre côtés égaux est un losange Un parallélogramme ayant deux côtés consécutifs égaux est un losange
Énoncé du problème	**Termes de la liste et sous-configurations isolées**	**Théorèmes évocables**
B1 :  [AB]diamètre du **cercle** A, D et E sont des points du	« cercle » sous-configuration des deux rayons AO et OE	Les rayons du cercle ont tous la même longueur

cercle (AE) est perpendiculaire à (OD) AO = AD Montrer que **AOED c'est un losange**	« AOED losange » sous-configuration des diagonales Appréhension opératoire du triangle OAD associée à la donnée de la liste AO=AD (donnée codée). Appréhension opératoire du triangle AOE associée à la donnée de l'énoncé « O centre du cercle » Appréhension opératoire du cercle et des rayons OA et OE	Un quadrilatère ayant les diagonales perpendiculaires qui se coupent en leur milieu, est un losange (Définition) Un triangle ayant deux côtés égaux est isocèle Les rayons du cercle ont tous la même longueur Un triangle ayant deux côtés égaux est isocèle
B2.  [AB]diamètre du **cercle** O centre du cercle AOED parallélogramme Montrer que **AOED c'est un losange**	« cercle » sous-configuration des rayons AO et OE « AOED parallélogramme » sous-configuration du quadrilatère AOED « AOED losange » sous-configuration du quadrilatère AOED	Les rayons du cercle ont tous la même longueur Un parallélogramme est un quadrilatère ayant les côtés opposés égaux et parallèles Un parallélogramme ayant deux côtés consécutifs égaux est un losange Un quadrilatère ayant quatre côtés égaux est un losange

Évidemment les théorèmes évocables pour les problèmes A1 et A 2 à partir du seul énoncé le sont aussi dans les problèmes B1 et B2 puisque aux mots de l'énoncé s'ajoutent les sous-configurations comme source d'évocation dans le cas de B1. Or, si dans le cas de B1 apparaissent des nouveaux théorèmes évocables dus à la diversité des sous-configurations possibles, dans le cas de B2 il n'apparaît pas des théorèmes supplémentaires par rapport à A2.

On peut donc s'attendre à ce que le dessin joue un rôle important pour le processus de résolution pour les problèmes 1 et à ce que joue un rôle moindre pour les problèmes 2.

Nous nous proposons de comparer l'ensemble des théorèmes évocables, c'est-à-dire utiles pour la résolution des problèmes dont le tableau a été présenté ci-dessus, avec l'ensemble des théorèmes effectivement évoqués par les élèves lors de leur processus de résolution. Cette question sera abordée et développée lors de la présentation des résultats de l'analyse, au Chapitre VI.

3. Variables

Les problèmes que nous proposons dans l'expérimentation sont conçus pour mettre en évidence les fonctions du langage lors de la relation entre appréhension opératoire et référent théorique dans les processus de résolutions. Pour poursuivre cet objectif les variables choisies sont au nombre de deux :

- ✓ La forme dans laquelle le problème est proposé : la forme « énoncé » et la forme « liste de données, question et dessin»
- ✓ La forme dans laquelle les données sont fournies : la forme « analytique», c'est à dire la forme dans laquelle les données sont toutes explicitées dans l'énoncé, et la forme « concentrée » dans laquelle les données ne sont pas toutes explicitées mais elles sont justement concentrées dans le mot « parallélogramme ».

Voyons plus en détail la valeur que ces variables prennent dans les problèmes à l'aide du tableau suivant.

Tableau 4.4
Valeurs des variables

Variables	Problème A1	Problème A2	Problème B1	Problème B2	Problème 3
La **forme** dans laquelle le **problème** est proposé	Énoncé + question	Dessin + Liste données + question	Énoncé+ question	Dessin + Liste données + question	Énoncé+ question
La **forme** dans laquelle les **données** sont fournies	analytique	analytique	concentrée	concentrée	analytique

Suite au choix des variables, les questions qu'on se pose sont les suivantes :

Quel est le rôle joué par les différentes valeurs des variables lors du processus de résolution ?

Peuvent-elles favoriser les fonctions du langage comme outil de résolution ?

Nous essayerons de répondre aux questions dans les paragraphes suivants.

3.1 Forme dans laquelle le problème est proposé.

L'analyse a priori de l'influence de cette variable sur le processus de résolution est conduite sur la base d'une confrontation entre les problèmes de la ligne A (A1 et A2) et les problèmes de la ligne B (B1 et B2) du Tableau 4.1. Comme montré au Tableau 4.3, la variable « forme dans laquelle le problème est proposé » peut prendre deux valeurs :

- le problème est proposé comme seul énoncé accompagné par la question du problème. C'est le cas des problèmes A1, A2 et du problème 3
- le problème est proposé sous forme d'une liste de données, de la question du problème et du dessin. C'est le cas des problèmes B1 et B2.

Pour les problèmes A1 et A2, où la variable « forme du problème » prend la valeur du seul énoncé, il est vraisemblable penser que la première phase du processus de résolution sera la construction du dessin, tandis que pour les problèmes B1 et B2, où la variable assume la valeur « dessin + liste de données », il est raisonnable penser que la première phase du processus de résolution sera centrée sur l'interprétation du dessin et sa coordination avec les données de la liste.

Il en découle que les valeurs assumées par la variable « forme du problème » donnera lieu à deux pistes principales d'analyse a priori des allers et retours entre appréhension opératoire du dessin et référent théorique. Ces pistes sont l'une centrée sur la construction du dessin, l'autre centrée sur l'interprétation du dessin. Nous précisons cette affirmation dans le paragraphe qui suit.

3.1.1 Problème proposé comme seul énoncé

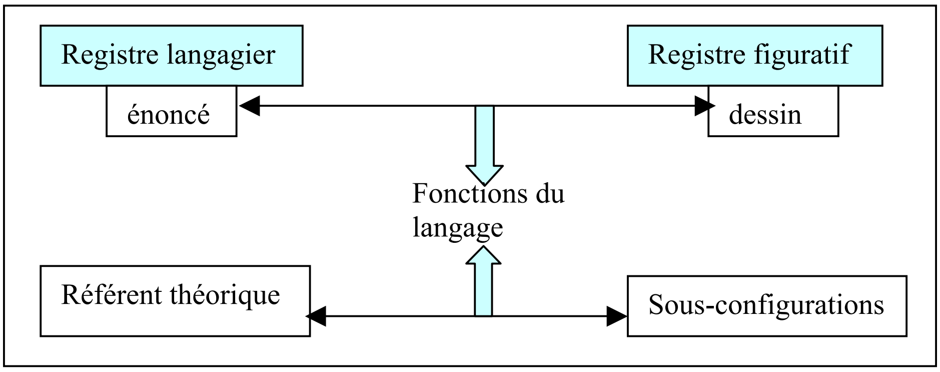
Pour répondre aux questions à propos du rôle des variables lors du processus de résolution (paragraphe 3), nous faisons l'hypothèse que le problème proposé aux élèves par le seul énoncé, puisse induire la construction du dessin. En effet, il paraît invraisemblable que des élèves des premières années du lycée puissent dégager un processus de résolution d'un problème de géométrie plane, sans le support du dessin. Duval[6] explique que le dessin « donne une représentation d'une situation géométrique plus facile à appréhender que sa présentation dans un énoncé verbal » (Duval, 1994, p.121). En effet, ajoute-t-il en s'appuyant sur la considération de Bessot : le dessin fait « apparaître sur un objet visible des relations ou

[6] Dans son article «Les différents fonctionnements d'une figure dans une démarche géométrique » (1994, REPER- IREM, N° 17), Duval considère l'emploi du dessin mais non spécifiquement la construction d'un dessin. Cependant, nous retenons que ses considérations à propos de la nécessité d'usage du dessin en géométrie étaient également valables lorsque la construction d'un dessin participe d'un processus de résolution d'un problème de géométrie.

des hypothèses de relations[7] qui ne sont pas clairement évidentes dans un énoncé verbal » (A. Bessot, 1983, p.35). En effet, à la différence d'un discours, les dessins « font apparaître pour chaque objet toutes ses relations avec les autres objets de la situation représentée » (Duval, p. 121). En d'autres termes, aux dessins sont associés les domaines d'interprétation et de fonctionnement[8] qui permettent respectivement d'associer à certaines propriétés spatiales du dessin un ensemble de propriétés géométriques de l'objet, et de représenter l'ensemble de propriétés géométriques de l'objet par certaines des propriétés spatiales du dessin (cf. paragraphe « Phase de construction »).

Ainsi, nous considérerons la construction du dessin comme un aspect essentiel pour l'analyse a priori du déroulement des processus de résolution des problèmes proposés sous la forme du seul énoncé. L'objectif sera de répondre à la question suivante : la construction du dessin peut-elle favoriser la mise en relation de l'aspect conceptuel et de l'aspect figuratif ?

Comme la construction du dessin passe par la coordination entre le registre linguistique propre à l'énoncé et le registre figuratif propre au dessin, nous pouvons imaginer que, la coordination entre ces registres sera verbalisée, au moins partiellement, et nous pouvons ainsi repérer les fonctions du langage sur les choix des référents théoriques et des sous-configurations à isoler dans le dessin pour l'organisation et l'avancement du processus de résolution.



L'analyse a priori se centre donc sur la relation entre énoncé et construction du dessin en termes de coordination entre le registre figuratif et le registre langagier sur la base du processus de « conversion » défini par Duval et présenté dans le paragraphe suivant.

3.1.1.1 Le processus de conversion proposé par Duval

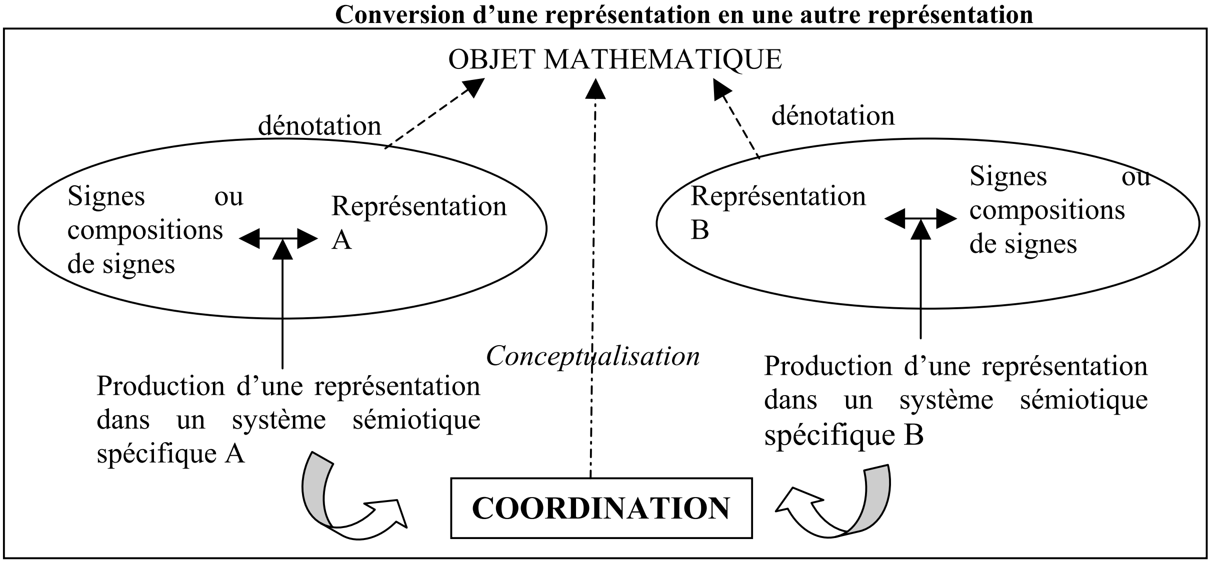
Nous proposons d'interpréter la relation entre l'énoncé et la construction du dessin à l'aide du schéma proposé par Duval (2000, pp.55 - 69). Il soutient que :

[7] Nous interprétons les « hypothèses de relations » comme le résultat d'une appréhension perceptive du dessin qui doit être supportée par une appréhension discursive du dessin : l'explicitation d'autres propriétés mathématiques que celles indiquées.
[8] Les définitions de ces domaines sont fournies au paragraphe « Phase de construction »

> « for any mathematic object we can have different representations produced by different semiotic system. […] But that necessary variety of semiotic system raises important problems of coordination. […] Whenever a semiotic system is changed, the contents of representation changed, while the denoted object remains the same…». (Duval, 2000,p.59)

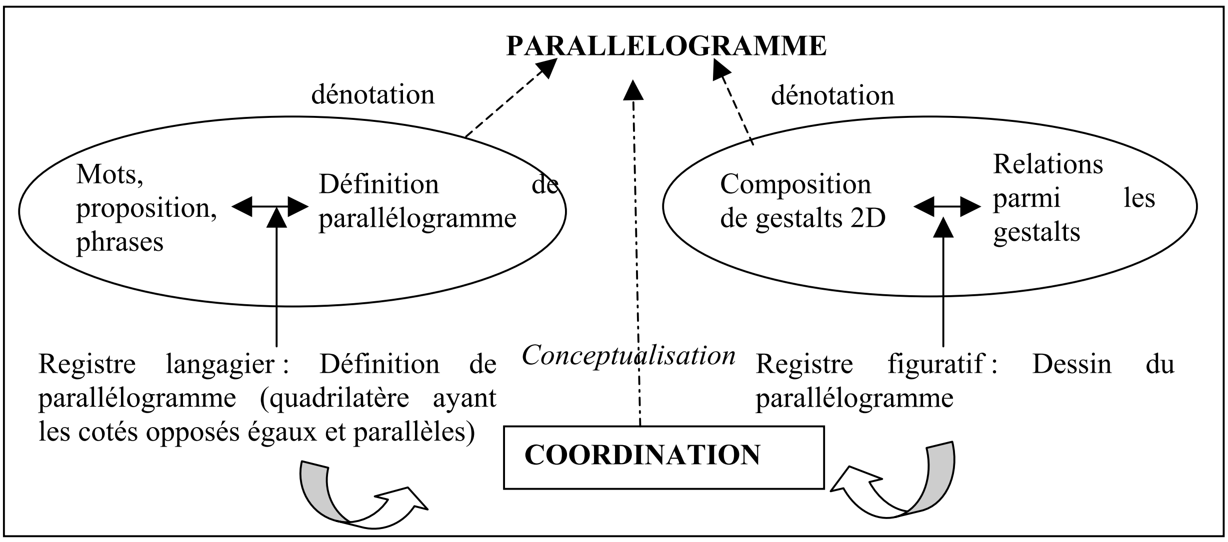
L'opération qui permet de passer d'une représentation dans un certain système sémiotique à un autre est appelée par Duval "conversion". L'hypothèse faite par Duval est que la coordination entre différents registres de représentation contribue à la conceptualisation de l'objet mathématique. Le schéma proposé par Duval, relevant de la représentation et de la compréhension d'un objet mathématique, est le suivant :

Schéma 1
Conversion d'une représentation en une autre représentation



Par exemple, dans le problème A2 de notre expérimentation, la construction du dessin met en jeu l'objet « parallélogramme ».

Schéma 1.1
Conversion de la représentation langagière du parallélogramme en la représentation graphique du parallélogramme



L'opération de construction du dessin associé aux problème A1 ou A2 nécessite donc de coordonner de deux registres : le registre langagier, dans lequel on récupère les données de l'énoncé, et le registre figuratif, dans lequel ces données doivent être traduites.

Observons que la coordination entre les deux registres peut se passer aussi dans le sens inverse : du registre figuratif au registre langagier. Dans ce cas, on aura l'interprétation du dessin (fourni dans le problème) afin de conceptualiser l'objet parallélogramme. La conversion du registre figuratif au registre langagier sera abordée au paragraphe consacré aux problèmes proposés comme liste de données accompagnée d'un dessin.

3.1.1.2 Phase de construction du dessin

Du point de vue de la forme du problème nous pouvons dire que dans le problème A1 la conversion des informations données en langage naturel en dessin ne pose pas de difficultés particulières parce que n'exige pas de coordination entre gestalts : il suffit de traduire séquentiellement les informations données dans l'énoncé en tracés successifs. En revanche, la construction du dessin dans le problème A2 pose un problème car elle exige de coordonner la gestalt des points D et E sur le cercle avec la gestalt du parallélogramme OADE. Or, ceci est un véritable problème de construction géométrique qui ne se résout qu'une fois que le problème 2 est résout. On s'attend donc à ce que la construction du dessin dans le problème 2 ait faite soit à main levée soit par tâtonnement.

Bien que notre expérimentation ne concerne pas des problèmes de construction géométrique, il s'agit ici de construire une figure, dans la théorie euclidienne, comme produit du rapport entre dessin et objet géométrique, selon la triade référent, signifiant, signifié (C. Laborde & B. Capponi, 1994). La coordination entre le registre langagier et le registre figuratif concerne donc ici non seulement la conceptualisation de l'objet géométrique mais aussi la construction de la figure[9] correspondante. Dans la suite, nous parlerons de « construction du dessin » pour souligner que l'action de construction produit un objet, c'est-à-dire le dessin, sur un support matériel tel la feuille, que les élèves traiteront selon les modifications méréologiques, optiques et positionnelles, prévues par Duval.

[9] La notion de figure que nous adoptons ici découle de la définition donnée par Capponi et Laborde dans « Cabri-géomètre constituant d'un milieu pour l'apprentissage de la notion de figure géométrique » (1994) : « La figure géométrique consiste en l'appariement d'un référent donné à tous ses dessins, elle est alors définie comme l'ensemble des paires formées de deux termes, le premier terme étant le référent, le deuxième terme étant un des dessins qui le représente ; le deuxième terme est pris dans l'univers de tous les dessins possibles du référent » (p.168.

3.1.2 Problème proposé comme liste de données accompagnée d'un dessin.

Des nombreuses études ont montré que souvent, dès que les élèves ont tracé le dessin correspondant au problème, ils ne prennent en compte que le dessin en laissant au deuxième plan les informations de l'énoncé. Le dessin devient leur point de repère, ils « oublient » l'énoncé du problème. Leur conduite est la même, si le dessin est fourni dans le problème. Or, sur la base de cette considération, nous proposerons dans notre expérimentation une version des problèmes sous la forme d'une liste de données, d'un dessin et d'une question.

L'objectif est d'examiner la deuxième piste d'analyse que les valeurs de la variable « forme du problème » nous ont permis de définir : l'interprétation du dessin.

Si, comme on a dit ci-dessus, le dessin est mis au premier plan par rapport à la liste d'informations et s'il dévient l'unique source de données, alors l'interprétation du dessin est évidemment réalisée en acte. Cette interprétation du dessin peut être conduite principalement sur la base des liens spatio-graphiques entre les gestalts composants le dessin ou alors sur la base des relations géométriques des gestalts composantes le dessin. Cela signifie que l'interprétation du dessin peut être conduite en termes spatio-graphiques ou en termes géométriques. Pour autant, nous souhaitons observer si et comment les élèves reconstruisent les liens entre propriétés spatiales du dessin et propriétés géométriques lors de l'interprétation du dessin. Ce qui comporte la mise en acte de l'appréhension opératoire et discursive du dessin en lien avec la théorie et, donc, avec des référents théoriques.

Observons en outre que le dessin des problèmes B est fourni aux élèves déjà codé. Ce choix dépend d'une double raison. En effet, si les élèves ne prennent pas en compte les seules données codées sur le dessin, alors nous pouvons penser qu'ils mettent en acte une appréhension discursive du dessin pour en tirer d'autres propriétés géométriques que celles codées. Tandis que, s'ils prennent en compte les seules données codées, nous pouvons dire que dans l'interprétation, ils ne cherchent pas à inférer des propriétés géométriques. Le processus d'interprétation devient une simple appréhension opératoire du dessin.

Nous croyons qu'une des raisons pour lesquelles les élèves ne prennent pas en compte la liste de données relève du contrat installé en classe à propos du codage. En effet, il est souvent légitime de coder les seules informations explicites de l'énoncé, et il se peut que les élèves lisent cette implication à l'envers: toutes les informations de l'énoncé sont codées sur le dessin. De là, il résulterait qu'il est inutile de prendre en compte les données de l'énoncé ; cela reviendrait à lire deux fois les mêmes informations fournies dans deux registres de représentation sémiotique différents (langagier pour l'énoncé et symbolique pour le dessin)

En résumé, si les élèves prennent en compte les seules données codées, ils démarrent probablement de préférence par une appréhension opératoire du dessin ; si au contraire, ils prennent en compte d'autres propriétés géométriques que celles codées sur le dessin, alors ils ont tendance à démarrer par l'appréhension discursive du dessin. Or, si le problème B1 peut orienter vers l'une ou l'autre démarche, le problème B2 entre nécessairement dans la deuxième démarche en raison de la valeur prise par la variable « forme dans laquelle les données sont fournies », comme nous l'expliquerons au paragraphe suivant.

3.2 Forme dans laquelle les données sont fournies

La description de cette variable est menée sur la base d'une confrontation entre les problèmes A1 et B1 et les problèmes A2 et B2 (colonne 1et colonne 2 du Tableau 4.1). La variable « forme dans laquelle les données sont fournies » peut prendre deux valeurs :

1. Les données sont fournies de façon analytique dans l'énoncé du problème ou dans la liste. C'est le cas des problèmes A1 et B1.
2. Les données sont fournies de façon concentrée dans l'énoncé du problème ou dans la liste. C'est le cas des problèmes A2 et B2.

La raison de ce choix relève de la nécessité de mettre en évidence l'action différente des appréhensions du dessin et le rôle du langage lors de ces appréhensions.

Les problèmes 1 et 2 renvoient apparemment à la même configuration mais leurs processus de résolution devraient se développer par deux démonstrations différentes car ils diffèrent par la forme dans laquelle les données sont fournies : dans les problèmes 1 (A1 ou B1) les propriétés et les relations entre les éléments de base du dessin ont exprimées sous forme analytique dans l'énoncé ou dans la liste, tandis que dans les problèmes 2 (A2 ou B2) nous avons condensé tout un ensemble de propriétés et relations dans le mot de la configuration du parallélogramme (problème B2). Cette version du problème (version 2) devrait induire les élèves à regarder ce qu'entraîne le mot ou la configuration « parallélogramme » pour avancer dans la résolution. Les élèves devraient être ainsi conduits à une appréhension discursive du dessin.

Pour démarrer le processus de résolution du problème 2 une appréhension discursive du dessin est nécessaire comme par exemple, « on a un parallélogramme donc les côtés opposés sont égaux et parallèles… ».

En bref, le problème 1 ne nécessite pas une appréhension discursive mais favorise davantage une appréhension opératoire du dessin, le problème 2, par contre, nécessite une appréhension discursive du dessin. L'hypothèse sur le rôle de la variable « forme dans laquelle les données sont fournies » est donc fondée sur l'idée que l'explicitation des données dans l'énoncé peut davantage induire une appréhension opératoire sur le dessin, tandis que l'absence des propriétés géométriques explicites reliant les gestalts ou sous-configurations du dessin, conduit les élèves à aborder le processus de résolution par l'appréhension discursive du dessin. En d'autres termes, la formulation des données peut conduire les élèves à dégager le processus de résolution soit à partir du dessin, pour le problème 1, soit à partir de l'énoncé, pour le problème 2. L'analyse du processus sera donc menée sur la base du mécanisme centré sur le dessin dans ce premier cas ou sur la base du mécanisme centré sur l'énoncé dans le deuxième cas (cf. chapitre III).

Le problème 3, enfin, réponde à l'objectif de mettre les élèves dans une situation où il faut considérer à la fois l'appréhension opératoire, l'appréhension discursive du dessin et la question du problème pour l'avancement du processus, comme on verra dans le paragraphe suivant.

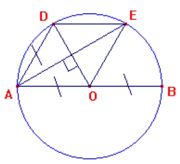
4. Traitements des problèmes

L'analyse a priori des traitements des problèmes porte sur l'hypothèse que les valeurs assumées par les variables peuvent favoriser un processus résolutif centré sur un mécanisme « dessin » ou sur un mécanisme « énoncé ».

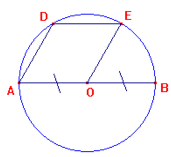
4.1 Traitement des problèmes 1, 2 et 3

Nous pouvons imaginer que les élèves démarrent leur processus de résolution à partir de la question du problème et de l'appréhension discursive du dessin (dans le cas d'un mécanisme centré sur l'énoncé) ou à partir d'une appréhension opératoire du dessin (dans le cas d'un mécanisme centré sur le dessin). Ce que nous nous proposons de faire ici, consiste à décrire comment les variables agissent sur les appréhensions du dessin et donc sur les traitements possibles des problèmes.

Mais que ce soit dans un mécanisme centré sur l'énoncé ou dans un mécanisme centré sur le dessin, l'appréhension opératoire du dessin est nécessaire pour l'avancement du processus. En effet, si d'un côté elle permet d'isoler des sous-configurations qui suscitent l'évocation de théorèmes utiles à la résolution, d'un autre côté, elle permet d'appliquer les théorèmes évoqués. Par exemple, dans le problème 1, nous pouvons imaginer qu'une première appréhension opératoire permettra d'isoler la sous-configuration du quadrilatère ayant les diagonales [OD] et [AE] tracées, tandis que dans le problème 2, l'appréhension opératoire permettra davantage d'isoler la sous-configuration du quadrilatère



Prob. 1



Prob. 2

sans aucune diagonale tracée. De cette façon, les configurations isolées sont congruentes[10], au sens de Duval, avec les énoncés des respectifs problèmes ou avec les listes de données des respectifs problèmes. Il est donc vraisemblable imaginer que la présence des diagonales dans le quadrilatère, oriente vers le théorème [1] « Un quadrilatère ayant les diagonales perpendiculaires qui se coupent en leur milieu est un losange » tandis que l'absence des diagonales dans le quadrilatère, comme dans le cas du problème 2, oriente plutôt vers le théorème [2] « Un quadrilatère ayant les quatre coté égaux est un losange ».

D'autre part, dès que le théorème [1] est évoqué, pour prouver ses hypothèses, il faudra l'appréhension opératoire du dessin qui permet de reconnaître, par exemple, la sous-configuration du triangle OAD ou du triangle AOE. En revanche, pour prouver l'hypothèse du théorème [2], il faudra isoler la sous-configuration des rayons (AO) et (OE) du cercle.

La valeur de la variable conduit au tracé des diagonales pour le problème 1 et à leur absence pour le problème 2. Elle joue donc un rôle important sur l'appréhension opératoire et donc conditionne l'évocation des théorèmes utiles pour l'avancement du processus de résolution.

Le dessin fourni dans les problèmes B est choisi de façon à ce qu'il soit congruent avec l'énoncé (toutes les informations explicites dans l'énoncé sont représentées sur le dessin). De plus, la sous-configuration qu'il faudra isoler pour l'avancement du processus de résolution des problèmes 1 et 2 (le quadrilatère OADE) est congruente avec la question du problème. Le cas du problème 3 est différent des deux autres. Dans le problème 3, la sous-configuration (la droite (DE)) à isoler pour évoquer le théorème, n'est pas congruente avec la question (1) du problème et n'amène pas directement vers l'avancement du processus. En effet, la sous-configuration utile est celle du triangle DBA ou du triangle EBA qu'on peut isoler par une nouvelle appréhension opératoire. Donc, à la différence des problèmes 1 et 2, dans le problème 3 il faut une double opération d'appréhension opératoire sur le dessin qui permet d'isoler la droite (DE) et les triangles DBA ou EBA. Mais ces sous-configurations ne sont pas congruentes avec la question du problème. Ainsi, la sous-configuration « droite », qui nous pouvons raisonnablement prévoir sera tracée pour relier les points D, B et E, permettra d'évoquer le théorème utile à la résolution : « trois points sont alignés s'ils appartiennent à la

[10] Duval souligne qu'une conversion, en tant que transformation de représentation d'un même objet dans deux registres sémiotiques différents, peut être congruente ou non-congruente. La conversion est congruente si elle « can be seen like an easy translation unit to unit » (Duval, 2000, p.63) Par exemple, il considère comme congruente l'opération suivante :

ensemble de points dont la coordonné y est plus grande de la coordonné x → $Y>X$

Par contre, une conversion n'est pas congruente lorsqu'on peut pas traduite unité par unité dans les deux registres pris en charge. Par exemple :

ensemble de points dont la coordonné x et la coordonné y ont toutes les deux le même signe → $X*Y>0$

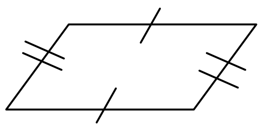
même droite ». L'hypothèse manquante pour l'application de ce théorème n'est pas encore explicite : il faudra un pas de déduction accompagné par l'ajout du trait AB pour passer de la droite (DE) à l'angle de 180° (l'angle entre les points D et E). L'appréhension opératoire nécessaire consiste à isoler la sous-configuration qui se compose des deux triangles rectangles, DBE et EBA, elle ne résulte pas de façon directe de la verbalisation de l'hypothèse. Au contraire, pour les problèmes 1 et 2, les hypothèses manquantes sont explicites (par exemple, « les diagonales se coupent en leur milieu ») et l'appréhension opératoire est ainsi guidée par la verbalisation de ces hypothèses (on isolera par exemple la sous-configuration du triangle isocèle OAD).
L'analyse des traitements possibles des problèmes 1, 2 et 3 confirme donc ce qui a été affirmé au moment du choix des problèmes (cf. paragraphe 2.3). Le problème 1 est choisi pour faire jouer davantage l'appréhension opératoire du dessin, en revanche, le problème 2 est choisi pour faire jouer davantage l'appréhension discursive. Enfin, le problème 3 est choisi pour faire jouer les deux appréhensions en interdépendance sans donner un rôle dominant ni à l'une ni à l'autre.

4.2 Le codage suite à la construction du dessin

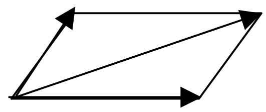
Dans le contexte du traitement des problèmes, nous retenons aussi l'opération de codage des dessins. Cette opération peut être effectuée juste après la construction du dessin ou au cours du processus de résolution. C'est pourquoi, l'analyse du codage peut être abordée sous deux points de vue : l'un qui considère le codage comme une opération de coordination entre registres (registre langagier de l'énoncé et registre symbolique des marques), l'autre qui considère le codage comme une opération d'interprétation géométrique du dessin. Le codage juste après la construction du dessin requiert la coordination entre le registre langagier où les informations sont données dans l'énoncé et le registre symbolique des marques. En revanche, dès que l'on marque sur le dessin des relations inférées, c'est-à-dire des relations géométriques qui ne sont pas explicites dans l'énoncé, alors on peut dire qu'il y a une interprétation géométrique du dessin. Cet usage correspond au codage en cours de résolution

Dès que le dessin est construit, au dessin est attaché un « domaine d'interprétation » qui nous a conduit à retenir l'appréhension discursive du dessin comme opération fondamentale pour l'avancement du processus de démonstration. D'autre part, le codage joue un rôle sur le choix du domaine théorique dans lequel le dessin est interprété. Destainville signale que « Suivant les codages que l'on veut y pratiquer (orthogonalité, égalité des mesures, fléchages des

vecteurs …) et les informations que l'on peut lui associer (résultat numérique, relation vectorielle, présence d'une transformation, …) le même dessin peut correspondre à des outils géométriques divers (numérique, vectoriel, transformation, …) » (Destainville, 1995 p. 119)
Ainsi, un parallélogramme par exemple, peut être codé pour évoquer l'égalité entre deux cotés ou bien la somme de deux vecteurs. Les outils géométriques correspondants seront numériques, dans le premier cas, et vectoriel dans le deuxième.



Parallélogramme dont une des ses propriétés géométriques a été codée (côtés opposés de même longueur)



Représentation de la somme des vecteurs

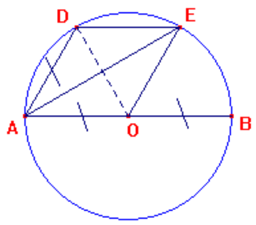
Comme Duval le souligne, l'opération de codage est soumise à une règle de congruence entre dessin et énoncé : il est légitime de coder seulement les informations explicites de l'énoncé. Dans ce cas, le codage consiste en une conversion presque unité par unité : les relations géométriques et les propriétés exprimées dans l'énoncé par le registre langagier sont traduites dans une représentation symbolique par des signes ou une composition de signes. La coordination entre registres est congruente justement parce que les propriétés codées sont seulement celles explicites dans l'énoncé. Mais, à notre avis, l'opération de codage peut ne pas être soumise à cette règle de congruence lorsqu'elle s'effectue pendant le processus de résolution. Tout d'abord, donc, **nous pouvons raisonnablement prévoir que le dessin sera codé aussi pendant le processus de résolution**. Cette hypothèse s'appuie sur le constat, bien connu des enseignants italiens, que le codage peut être utilisé en classe même s'il n'est pas objet d'enseignement. Le codage est ressenti comme un autre langage utilisé de façon spontanée tel le langage naturel. C'est pourquoi son usage n'est pas soumis à jugement de la part des enseignants. Il semble qu'en France l'usage du codage est plus normalisé.
Coder des informations qui ne sont pas explicites mais qu'on peut déduire des informations données, relève de l'action conjointe de l'appréhension opératoire et de l'appréhension discursive sur le dessin : l'appréhension opératoire permettra d'identifier les gestalts du dessin et l'appréhension discursive permettra d'en tirer des relations géométriques entre eux. C'est pourquoi cet aspect entre dans notre analyse a priori. L'opération de codage, donc, relève d'un lien entre l'appréhension opératoire et l'appréhension discursive du dessin et elle peut ne pas être congruente avec l'énoncé car l'ensemble des propriétés en jeu change au cours du

processus par rapport à l'énoncé.

Imaginons donc ce qui peut arriver suite à l'opération de construction du dessin.
Nous distinguons le cas où le dessin est codé ou celui où il est non codé.

4.2.1 Cas où le dessin est codé par l'élève

Comme certains études le montrent, l'opération de codage n'est pas une opération spontanée de la part des élèves. Mais nous croyons que cela dépend fortement de la classe (donc de l'âge des élèves) et du pays auquel les élèves appartiennent. En effet, Laborde a « remarqué le peu de spontanéité dans l'usage du code symbolique dans des productions écrites les élèves de 11 à 15 ans lorsque le codage n'était pas imposé » (Laborde, 1982, p. 214) Par exemple, on sait que les élèves du collège ne codent pas le dessin spontanément et, de toute façon, ils ne maîtrisent pas cette opération[11], tandis que les élèves du lycée maîtrisent beaucoup mieux cette opération et, de plus, l'utilisent spontanément. Mais cela dépend aussi du contrat que l'enseignant a instauré en classe et de là, des habitudes de classe dans les pays où l'expérimentation a été mise en place.
Or, en supposant que le dessin soit codé, et qu'il le soit spontanément, rappelons qu'il faut distinguer deux moments où le codage peut s'effectuer : au début du processus, donc juste après la phase de construction ou pendant le processus de résolution. Comme on vient de le dire, suite à la construction du dessin, il y aura plus de chances que les élèves codent les seules relations explicites dans l'énoncé. Nous avançons donc l'hypothèse qu'on n'aura pas un codage maximal, car les élèves ne coderont pas toutes les relations parmi les gestalts du dessin. De plus, nous pouvons raisonnablement prévoir que l'information « D point du cercle » ainsi que « E point du cercle », bien qu'appartenant à l'énoncé, ne seront pas codées car la position des points sur le cercle peut être relevée par appréhension perceptive, c'est-à-dire la position des points est perceptive ment évidente.



Ou encore, il est vraisemblable penser qu'en suivant la séquence des données fournis dans l'énoncé, les élèves dessineront d'abord un cercle et son diamètre, en suite ils coderont, peut être, les rayons AO et OB, et puis ils coderont AD égal à AO étant donnée de l'énoncé. Mais, comme dans l'énoncé n'est pas demandé explicitement de tracer OD, alors il est vraisemblable penser que les élèves ne traceront pas ce segment jusqu'au moment où il sera nommé la

[11] Par exemple, lorsque les élèves ont à coder un segment qui relève de deux interprétations géométriques différentes (il est rayon d'un cercle et, en même temps, il est coté d'un quadrilatère) ils utilisent deux signes à la fois, l'un pour coder le rayon et l'autre pour coder l'égalité de deux cotés du quadrilatère.

« perpendiculaire à OD ». À cette étape, nous pouvons imaginer que les élèves traceront le segment OD pour indiquer la perpendicularité avec le segment AE mais le segment OD ne sera pas codé. Le codage ne sera probablement maximal, c'est pourquoi, nous pouvons raisonnablement faire l'hypothèse que l'opération de codage se produira aussi pendant le processus de résolution.

4.2.1.1 Fonction du codage par rapport à la demande de démontrer

Trois hypothèses concurrentes peuvent être avancées sur la fonction du codage par rapport à la demande de démontrer au cours de la résolution. Les hypothèses sont en contradictions l'une avec l'autre, donc il est raisonnable de prévoir qu'une seule d'entre elles pourra être validée. Les deux premières sont dépendantes d'un contrat installé en classe, tandis que la troisième en est indépendante :

HY1) **les seules informations utilisables dans la démonstration sont celles codées**. On ne peut coder sur le dessin que ce qu'on a démontré

HY2) **les informations codées sur le dessin sont utilisables dans la démonstration mais d'autres relations fournies dans l'énoncé le sont aussi**

(Une des informations codées sur le dessin est AO = AD, mais une des informations qu'on ne peut pas coder et qui est fournie dans l'énoncé, est le parallélisme entre les côtés du parallélogramme)

HY3) **les informations codées sur le dessin aussi que d'autres relations lues sur le dessin sont utilisables pour la démonstration** (Parmi les informations qu'on peut « lire » sur le dessin, c'est-à-dire qui sont perceptiblement évidentes, il y a DE = OA ou encore AD // OE)

L'hypothèse 1 conçoit le codage comme n'ayant pas seulement une fonction de mémoire mais aussi une fonction de mémoire sélective. La signification associée au codage est strictement liée à l'appréhension discursive car les relations codées ont été démontrées à l'avance. L'attention est ainsi centrée entièrement sur le dessin où l'appréhension opératoire permet d'isoler des sous-configurations et l'appréhension discursive des relations géométriques parmi les éléments de base des sous-configurations isolées.

L'hypothèse 2 conçoit le codage comme support de mémoire pour les données qu'il est légitime d'utiliser. Comme l'énoncé ou la liste de données sont également prise en charge en tant que source d'informations, le codage sollicite à nouveau une opération de coordination entre le registre langagier et le registre figuratif.

L'hypothèse 3 conçoit le codage hors d'un contrat de classe. C'est pourquoi nous pouvons raisonnablement imaginer qu'un tel type de codage sera mis en place par les élèves qui ne maîtrisent pas l'opération de codage, car ils ne maîtrisent pas la relation entre signes et significations géométriques. Ces élèves s'appuient donc d'avantage sur l'appréhension perceptive du dessin

En nous appuyant sur l'idée que le codage pendant le processus de résolution concerne une interprétation géométrique du dessin et que cette interprétation peut influencer le processus de résolution, la question à laquelle nous essayerons à répondre a posteriori est la suivante : les fonctions du codage avancées ci-dessus dans les trois hypothèses concurrentes peuvent-elles influencer les processus de résolution des élèves ? Le codage du dessin peut-il influencer les fonctions du langage comme outils de résolution ?

4.2.2 Cas où le dessin n'est pas codé

Mais, comme supposé ci-dessus, il se peut que les élèves ne codent pas le dessin produit. Dans ce cas, nous pouvons imaginer que les informations déduites par appréhension discursive du dessin ou par simple constatation visuelle seront retenues dans le seul registre langagier sous forme orale ou écrite.

Notre but concernera donc une comparaison entre les deux cas (codage, pas de codage) pour voir comment et si le registre par lequel les informations sont retenues influe sur les relations entre appréhension opératoire, appréhension discursive du dessin et le référent théorique.

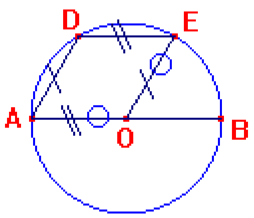
Il serait donc intéressant de remarquer comment ces informations seront récupérées pour être réinvesties afin d'évoquer le théorème utile à l'avancement du processus de résolution. En d'autres termes il serait intéressant de remarquer si le registre par lequel les informations sont retenues, influe sur la remise en place des informations mêmes.

En résumé, nous faisons l'hypothèse que la présence du codage peut favoriser l'appréhension discursive ou opératoire du dessin, même s'il n'est pas strictement nécessaire pour que ces types d'appréhensions se mettent en place.

4.3 L'interprétation du codage fourni dans le dessin du problème

Or, cette analyse se révèle particulièrement intéressante dans le problème 2 car il s'y crée une situation d'opposition entre l'interprétation et la production du codage, ce qui ne se produit pas dans le problème 1.

Dans le dessin du problème 2 les seules données explicites sont codées sur le dessin donc, nous n'avons pas codé la donnée « parallélogramme ». Or, il est vraisemblable de penser que les élèves, vu le peu des manques de codage sur le dessin, activeront l'appréhension discursive du dessin en suivant la séquence de données et d'informations fournies en plus du dessin. C'est pourquoi, après avoir codé les rayons du cercle, on peut imaginer que les élèves commencent à coder les relations géométriques reliant les côtés du parallélogramme. Les



couples de segments (AO, DE) et (AD, OE) seront codés avec deux marques différentes pour indiquer l'égalité de longueur des cotés de chacune des couples. Ce codage peut entrer en conflit avec le codage des rayons du cercle, en particulière des rayons AO et OE parce que, en tant que côtés du parallélogramme ils devront avoir a priori différente longueur, mais en tant que rayons, ils ont la même longueur.

Dans le problème 1 le codage suffit à rendre compte des données de la liste alors que dans le problème 2 il ne suffit pas. On peut s'attendre que dans le problème 1 les élèves travaillent davantage sur l'appréhension opératoire tandis que le problème 2 semble favoriser l'appréhension discursive du dessin car il n'existe pas de codage officiel d'un parallélogramme à disposition des élèves.

5. Conclusion

En conclusion, les problèmes choisis pour l'expérimentation font jouer certaines caractéristiques. Le problème 1 est choisi pour faire jouer davantage l'appréhension opératoire lors du processus de résolution. La forme analytique dans laquelle les données sont fournies conduit à tracer les diagonales du quadrilatère ce qui joue un rôle important sur l'appréhension opératoire du dessin.

Le problème 2 est choisi pour faire jouer davantage l'appréhension discursive lors du processus de résolution. La forme concentrée des données dans le seul mot « parallélogramme » induit les élèves à regarder ce qu'entraîne le mot ou la configuration « parallélogramme » pour avancer dans la résolution. Les élèves sont ainsi conduits à une appréhension discursive du dessin.

Le choix de ces problèmes vise mettre en évidence le rôle joué par le langage dans les allers et retours entre appréhension opératoire du dessin et référent théorique lorsque soit l'appréhension opératoire soit celle discursive sont les privilégiées dans le déroulement du processus.

Enfin, le problème 3 est choisi pour faire jouer les deux appréhensions en interdépendance. Le théorème utile à la résolution de ce problème n'est pas congruent à la question du problème, ce qui demande de faire jouer à la fois l'appréhension opératoire et celle discursive.

En outre, on s'attende que la variable « forme des données » jouera un rôle plus important que la variable « forme du problème » parce que nous avons remarqué plus de différences dans le traitement des problèmes par rapport à la forme des données que par rapport à la forme du problème.

CHAPITRE V

PRÉSENTATION DU FONCTIONNEMENT DE L'ANALYSE A PRIORI

Introduction

Comme nous l'avons souligné à plus reprises, le langage joue un double rôle dans notre travail : il est à la fois, outil pour les élèves qui résolvent le problème, car il exerce certaines fonctions d'aide à l'avancement du processus de résolution (hypothèse centrale de notre recherche), et outil pour le chercheur, car il est révélateur des ces fonctions. La question qui se pose alors est celle des moyens de mise en évidence des fonctions du langage lors de l'analyse du processus de résolution du problème. C'est justement pour répondre à cette question qu'ont été mis au point au Chapitre III des modèles d'analyse des processus de résolution :

- les *mécanismes*, l'un centré sur l'énoncé et l'autre centré sur le dessin
- la *démarche de résolution et diversions*, en tant qu'enchaînement de questions et réponses
- les *modes d'expansion disc*ursive.

L'analyse détaillée dans ce chapitre est faite à l'aide des modèles décrits au chapitre III. Elle concerne d'un part le processus de résolution, d'autre part les modes d'expansion discursive et enfin les relations qu'entretiennent ces dernières avec le processus de résolution.

Les mécanismes sont susceptibles de modéliser à la fois la démarche de résolution et l'avancement des modes d'expansion discursive. C'est pourquoi l'analyse du processus sera centrée surtout sur les Mécanismes et sur les étapes qui les composent. L'analyse fonctionnelle du langage se centrera sur des déplacements d'une étape à l'autre du mécanisme où nous chercherons à reconnaître les fonctions du langage.

Ce chapitre présent en détail un exemple d'analyse du processus de résolution issu du protocole de Camille et Gaëlle. Il a pour objectif de montrer comment nous faisons fonctionner les modèles mis en place a priori. Ce sera au Chapitre VI que nous mettrons en évidence les résultats que cette analyse est susceptible de fournir, soit à propos du langage en tant qu'outil de résolution, soit à propos du langage en tant que révélateur des fonctions du langage.

Présentation de l'analyse détaillée d'un protocole

Les mécanismes permettent de conduire une analyse à la fois globale et ponctuelle des allers et retours entre l'appréhension opératoire du dessin et l'évocation d'un référent théorique particulier. En effet, ils permettent de segmenter les processus en phases que nous avons appelées « étapes » dans lesquelles la relation entre l'appréhension opératoire et le référent théorique est analysée de façon locale, mais, en même temps, ils permettent de relever comment cette relation évolue ou même change au cours du processus de résolution, fournissant ainsi un point de vue plus global.

Nous avons choisi de présenter dans ce chapitre l'analyse détaillée d'un seul processus de résolution qui démarre par la verbalisation correcte et complète du théorème utile à la résolution. Cette analyse sera conduite sur la base du mécanisme centré sur l'énoncé. L'analyse d'un protocole conduite sur la base du mécanisme centré sur le dessin figure en annexe au chapitre. Nous ne l'avons pas placé dans le texte compte-tenu de sa taille. Rappelons que les mécanismes qui permettent de construire une réponse à partir d'une question sont centrés soit sur le dessin soit sur l'énoncé (comme le montre la Figure 1), selon que le processus de résolution démarre à partir de la question du problème ou par l'appréhension opératoire du dessin [1]

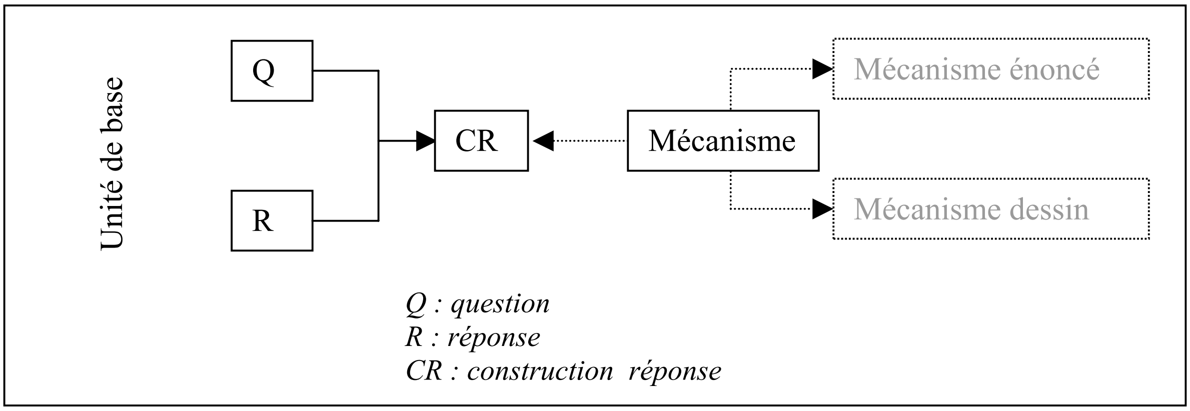


Fig. 1

Chaque unité de base (question-réponse) peut donner lieu à une analyse par deux mécanismes comme nous l'avons montré au moyen du schéma 2 du chapitre III. Nous analyserons le processus de résolution de Camille et Gaëlle à l'aide du mécanisme centré sur l'énoncé car

[1] Rappelons que le modèle « démarche de résolution » permet de représenter le processus de résolution par un enchaînement d'unités de base constituées du triplet [Q question, CR construction de la réponse, R réponse]

leur processus démarre à partir de la question du problème. Ce mécanisme, présenté au chapitre III, est composé d'une séquence d'étape **dont chacune prévoit l'analyse des valeurs des propositions énoncées (valeur épistémique et valeur de vérité) et du/des mode(s) d'expansion discursive.** Le mécanisme permet de mener une étude fonctionnelle du langage et de mettre en évidence l'influence du langage naturel dans les allers et retours entre appréhension opératoire du dessin et référent théorique.

Le déplacement successif d'une étape à l'autre composant le mécanisme porte notamment sur le changement de la valeur des propositions énoncées et sur le changement le mode d'expansion discursive. De plus, comme c'est au moment du changement de valeurs des propositions que seront identifiables les fonctions du langage en tant qu'outil de résolution du problème, nous poursuivrons dans ce chapitre une **analyse partielle des fonctions du langage**. L'analyse fonctionnelle du langage sera pleinement développée au Chapitre VI.

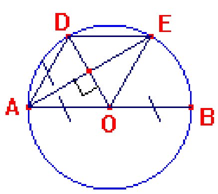
L'analyse des déplacements successifs d'une étape à l'autre composant le mécanisme s'appuie sur les questions suivantes :

1) Comment reconnaître l'avancement de l'expansion discursive et le changement des valeurs des propositions?
2) Quels sont les facteurs qui favorisent l'expansion discursive et le changement des valeurs des propositions?

Avant de proposer l'analyse conduite sur la base de la grille de modèles, présentons la fiche donnée au binôme Camille-Gaëlle

1 Fiche donnée aux élèves

Nom Prénom	Nom Prénom



[AB]diamètre du cercle
A, D et E sont des points du cercle
(AE) est perpendiculaire à (OD)
AO = AD

Le problème donné à Camille et Gaëlle relève donc de la modalité B1 Dans le paragraphe suivant nous proposerons la transcription de l'interaction verbale des élèves lors de la résolution du problème.

2 Transcription de l'interaction verbale des élèves lors de la résolution du problème

Légende :

- le noir signale la verbalisation de l'énoncé d'un théorème
- la bande signale une fonction de guide ou de planification (comme nous l'expliquerons au paragraphe 4.3)

1 C: Camille

2 G: Gaëlle

3 C: tu as vu?
4 G: c'est quoi ce truc?
5 C: il faut écrire…nom et prénom
6 G: "AB diamètre du cercle " *(elles lisent les données)*
7 C: "A, D, E sont des points du cercle " *(C. les indique sur la figure)*
8 C: "AE est perpendiculaire à OD" "AO est…. " Ou là là
9 G: ça est égal ça (*en indiquant AO et AD)* ça c'est un parallélogramme AO égal OE égal AD donc ça fait un parallélogramme
10 C: mais un parallélogramme c'est pas les côtés de la même longueur, c'est les côtés opposés qui sont….
11 G: ouais, ouais, tu as raison ... c'est un **losange**
12 C: ouais, ouais, **pour un losange il faut dire que les diagonales se coupent dans leur milieu et ils sont perpendiculaires**
13 C: le losange… les diagonales se coupent en leur milieu
14 G: et perpendiculaires
15 C: Attends, perpendiculaires c'est bon là, en fait, il faut dire que….
16 G: En fait ce côté c'est le même que celui là *(AD et OE)*, hein, il faut dire qu'elles sont parallèles aussi …t'as jamais utilisé le triangle rectangle dans le cercle? Je ne sais plus (*elle trace le segment BE)*
17 C: ouais, mais…
18 G: non … mais…
19 C: mais oui, mais….. enfin …ce n'est pas la peine de dire qu'elles sont parallèles à partir du moment qu'on sait que c'est un quadrilatère où les diagonales se coupent en leur milieu et perpendiculairement , dans ce cas là c'est évident qu'elles sont parallèles, non?
20 G: ouais, et … si on fait comme ça…..
21 C: ouais, mais dans ce cas là se coupent dans leur milieu
22 G: et comment tu fais pour savoir qu'y se coupent dans leur milieu?
23 C: ben justement, c'est ce qu'on veut démontrer, non?
Silence ... chuchotement…
24 G: *chuchote* A, D,O, attends, …ça… AO …DA.
25 C: c'est trop chiant
26 G: regarde ce qu'on peut dire: que AEB c'est rectangle ! 27 …
28 C: oui, oui, mais ça sera bon?
30 G: on sait jamais ça peut toujours servir
31 C: mais ouais, ça c'est, tout ça c'est des données et tout… *elle indique la liste de données à* côté *du dessin*
32 G: Attends, "A, D, E points du cercle AE perpendiculaire et AO égal AD
33 C: ah, ouais, ce que tu veux dire c'est que…..
34 G: je ne sais pas si ça serve à quelque chose, mais on sait jamais
35 C: je ne sais pas…….
36 G: peut être on peut démontrer, …tiens regarde ça c'est symétrique par rapport à ça (*AO et DE)* donc en fait c'est le même
37 C: et alors?
38 G: et après il faut qu'on puisse démontrer qu'il est parallèle à celui là
39 C: ouais, mais ce qu'il nous faut c'est de dire que c'est le milieu là,

ce truc, non?
40 G: ouais
41 C: c'est le milieu de ça et de ça *(de DO et de AE)*. Bon, super!
42 C: Attends, AO égal AD *(elle revient aux données codées sur le dessin)* … et si on prouve que le triangle DAO est isocèle,… parce que ça fait quelque chose, tu sais, par rapport à ça *(DO)*
43 G: ouais, parce que c'est la hauteur
44 C: ouais, c'est la hauteur
45 G: ouais, c'est aussi la médiane …AH OUI
46 C: ça veut dire, comme ça c'est la hauteur dans un triangle isocèle est aussi médiane donc… on peut donner une lettre? (*le point du milieu est nommé H)*
47 G: on compare les triangles en fait
48 C: on dit que c'est quoi? C'est … H
49 C: ADO isocèle HA est la hauteur car, attends…AE est perpendiculaire à OD
50 G: regarde les données
51 C: et aussi AE est perpendiculaire à OD alors AH perpendiculaire à OD. Marque-le là dessus! On met *(elle écrit sur la feuille)*... Si ... il faut dire que AH, H est un point de la droite AE et AE perpendiculaire à OD donc ça veut dire que AH perpendiculaire à DO
…
55 C: AH hauteur du triangle ADO, et si AD égal DO... ah! t'as mis *(Gaëlle avait déjà écrit que ADO isocèle)* ADO isocèle car...
56 G: tu fais une flèche
57 C: oui, attends, je mes : car AO égal AD, et dans un triangle isocèle la hauteur est aussi médiane (*le disent les deux élèves ensemble)*
58 G: médiatrice? Médiane, là c'est
59 G: donc se coupent dans son milieu
60 C: Ouais, mais nous on a que le milieu de DO, il faut dire aussi, ... il faut trouver le milieu de AE...
(Gaëlle parle en même temps) et là on a la même chose: dans un triangle isocèle la hauteur est aussi médiane
61 C: j'ai mis : une médiane passe au milieu d'un coté... au milieu, non?
62 G: la médiane passe par le sommet... enfin...
63 C: la médiane passe par le milieu du coté qu'elle coupe ? !
64 G: donc tu mes, DH, H est le milieu de DO
65 C: Donc <u>H est le milieu de DO</u>, de même
.... à ouais, mais pour l'autre triangle il faut dire que... comment on sait que AO est égal OE, c'est donné ou...? Mais comment on sait que c'est égal?
66 G: attends, ... parce que c'est un rayon du cercle
67 C: ah, oui!
68 G: donc voilà,
69 C: alors de même, dans l'autre triangle AOE, AO est égal à EO car ces sont des rayons du cercle, et le triangle est donc isocèle
70 G: et...
71 C: et OH est la hauteur
72 G: issue de O
72 C: donc la médiane ... <u>H milieu de AE</u>
donc là on mes tu, attends alors je fais une flèche comme ça. On met: **H milieu de**..
74 G: **AE et DO**
75 C: Attends je fais comme ça et après je mets un truc et je mes donc...
76 G: ouais, ok
77 C: H milieu de DO..
78 G: Ouais, tu mes toutes les données. Tu mets aussi perpendiculaire
79 C: **AE perpendiculaire à DO**
Attends je mes aussi que : **DO et AE sont les diagonales du quadrilatère ADEO**
Je mets un segment... comme ça ... je ne sais pas! AE et DO...
80 G: un segment je pense
81 C: (*elle écrit)* **et un quadrilatère où les... dont les diagonales *(Gaëlle chuchote « se coupent »)* se**

coupent dans leur milieu **82 G: perpendiculairement (*Camille écrit)*** **83 G: est un losange** **84 C: Donc ADEO est un losange, Voilà!**

3. Enchaînement de questions et réponses

Nous avons développé une première analyse du protocole de Camille et Gaëlle sur la base du modèle « démarche de résolution » (l'analyse détaillée à l'ANNEXE [1.1]). Cette analyse montre que le processus de résolution peut être décrit comme un enchaînement cohérent et complet d'unités de base (voir Fig. 1, dans ce chapitre). Ces unités sont composées d'une ou plusieurs questions (sous-questions), de la construction des réponses et des réponses. L'enchaînement des unités de base permet de modéliser le processus de résolution de la question du problème à la réponse finale et, comme on verra dans la suite, il permet de comprendre dans quelle mesure l'expansion discursive d'accumulation et de substitution conditionnent la rédaction finale du processus de résolution.

Le schéma 1 ci-dessous, reprend l'enchaînement des unités de base du processus de résolution du protocole de Camille et Gaëlle, à partir de la question du problème jusqu'à la réponse finale.

Nous démarrons l'analyse du protocole de Camille et Gaëlle sur la base du modèle « Démarche de résolution ». Nous nous souhaitons donc **identifier l'enchaînement des unités de base** constituées du triplet [question, construction de la réponse, réponse].

En nous appuyant sur la définition du modèle, nous interpréterons **les prémisses des théorèmes verbalisés en tant que questions des unités de base**, mais, évidemment, parmi ces questions, nous incluons **la question tirée directement de l'énoncé du problème**. Par conséquent, l'origine des questions peut être reliée soit à la verbalisation du théorème utile pour la résolution du problème, soit à l'énoncé du problème.

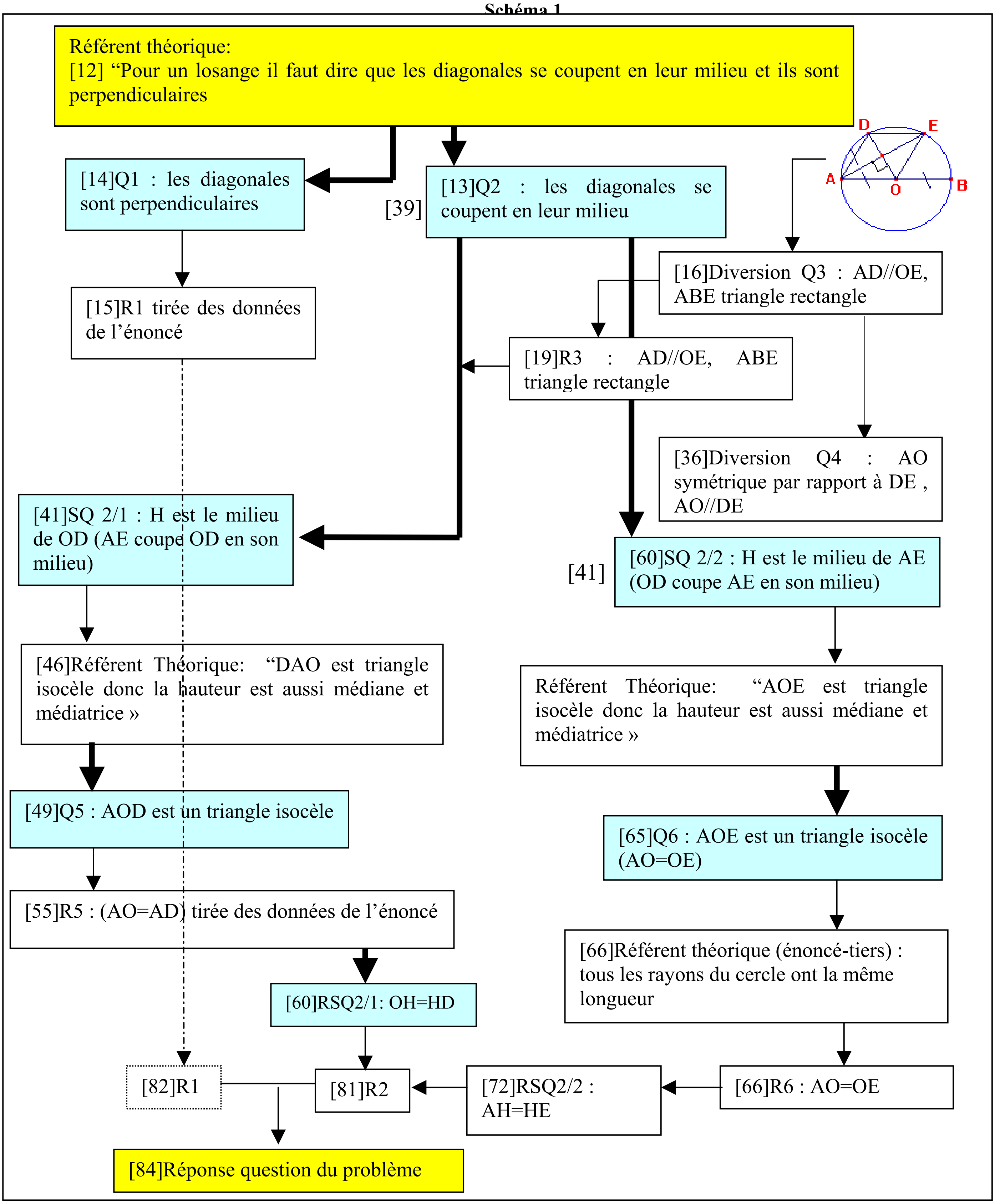
Pour ce qui concerne le processus de construction des réponses, nous nous proposons de vérifier sa nature, immédiate ou non immédiate, afin de reconnaître la nécessité de décomposer les questions en sous-questions, au cas d'une réponse non immédiate ou de fournir, au contraire, des réponses directes. Nous montrerons que le processus d'enchaînement des unités de base ne suit pas nécessairement un ordre linéaire mais, souvent, il se développe en « à branches d'arbre » suite à la définition des sous-questions.

Légende relative au schéma 1:

- Les carrés en grisé contiennent des questions ou des sous-questions
- Les flèches épaisses signalent la succession de questions et de sous-questions
- Les flèches fines signalent la succession de réponses obtenues éventuellement par l'explicitation de l'énoncé tiers

- Les flèches pointillées signalent une identité de réponses
- Les interventions qui apparaissent hors du carré Q2 ou SD2/ »signalent où la question a été reformulée au cours du processus (comme on verra après, elles correspondent à la fonction de guide exercé par la verbalisation de l'énoncé du théorème)
- L'intervention [16] démarre de l'interprétation du dessin.

Schéma 1



Cette segmentation en unités de base permet d'un part de repérer les diversions et d'autre part les unités question-réponse. Concernant les diversions, le tableau permet de constater qu'elles ont deux possibilités : soit elles ne débouchent pas et s'arrêtent, soit elles sont fermées par l'un des élèves et le processus se ramène à une unité question-réponse. Le tableau permet aussi de constater que toutes les questions apparues dans les protocoles ont trouvé une réponse. D'autres protocoles montrent des cas où des questions ne reçoivent des réponses et la segmentation permet de bien repérer où se situe les départs des diversions (voir le schéma en Annexe [1.2]).

En observant que le processus de résolution **démarre de la question du problème et qu'il permet aux élèves d'évoquer le théorème** utile pour aboutir à la solution (intervention [12]), nous modéliserons dans le paragraphe suivant le processus d'origine des questions et de l'enchaînement des unités de base par le mécanisme centré sur l'énoncé (voir à ce propos la définition de « Mécanisme centré sur l'énoncé » fournie au Chapitre III) .

4. Analyse du processus de résolution au moyen du Mécanisme centré sur l'énoncé et des modes d'expansion discursive

Nous développerons une deuxième analyse du protocole de Camille et Gaëlle par le mécanisme centré sur l'énoncé. Ce mécanisme vise mettre en évidence le rôle joué par le langage dans les allers et retours entre appréhension opératoire du dessin et le référent théorique sur la base de l'hypothèse que l'avancement du processus de résolution du problème porte sur le changement de la valeur des propositions et sur l'avancement des modes d'expansion discursive. Or, comme l'avancement des modes **d'expansion discursive passe par le changement de la valeur des propositions[2],** la modélisation par le mécanisme centré sur l'énoncé se dégagera de l'analyse des valeurs des propositions et sera présentée avant l'analyse de l'expansion discursive du processus.

Rappelons que le mécanisme centré sur l'énoncé concerne de quatre étapes sur la base desquels nous développerons l'analyse du protocole :

- l'évocation de l'énoncé d'un théorème à partir de la question du problème ou des données du problème;
- la verbalisation de l'énoncé du théorème ;
- l'appréhension opératoire du dessin visant à reconnaître les relations géométriques requises

[2] Dans la construction d'une réponse comme dans le discours ayant comme résultat la formulation d'une question, le vocabulaire passe du contexte spatio-temporel, où l'action et la perception sont dominantes et le référent est de type signifiant, au contexte qui n'est pas lié au temps et à l'espace dont le référent est de type théorique (objet théorique). Cela accompagne la valeur des propositions : de la valeur épistémique sémantique, au valeur théorique et à la prise de statut des propositions dans la structure de la phrase.

dans les prémisses du théorème ;

- le retour à l'énoncé du théorème.

La modélisation du processus de résolution par le mécanisme centré sur l'énoncé, est résumée dans le Tableau 5.1 ci-dessous, qui vise à schématiser les allers et retours entre appréhension opératoire du dessin et référent théorique sur la base des statuts opératoires et théoriques remplis par les propositions énoncées. Ce Tableau indique aussi les moments où les fonctions du langage agissent dans les allers et retours entre l'appréhension opératoire du dessin et référent théorique.

La suite et consacrée à l'analyse point pour point du processus de résolution à l'aide du modèle mécanisme centré sur l'énoncé.

Tableau 5.1 : processus de résolution décrit par le mécanisme centré sur l'énoncé.

La marque PF indique **le processus de formulation du théorème** ; la marque TD indique la phase de **retour du traitement sur le dessin** guidée par la structure du théorème.

Données	**Théorèmes évocables sous-jacents au raisonnement** (les théorèmes soulignés sont verbalisés)	**Prémisses**	**Sous-configurations** Issues de l'appréhension opératoire du dessin
Question : « démontrer que le quadrilatère est un **losange** » AE ⊥ OD	1) Un quadrilatère ayant les <u>diagonales qui sont perpendiculaires et qui se coupent dans leur milieu</u> est un losange. **Fonction d'association du langage PF**	**Fonction de guide du langage TD** Les diagonales du quadrilatère sont perpendiculaires (c'est la première prémisse à vérifier)	*Appréhension opératoire des diagonales du quadrilatère OADE
[AO] = [AD]	Définition : un triangle ayant deux côtés égaux est isocèle 2) La hauteur d'un triangle isocèle est aussi médiane et médiatrice	Le triangle OAD est isocèle **Fonction d'association du langage PF** H est le milieu du segment OD	*Appréhension opératoire du triangle OAD *Ajout de H, point d'intersection des diagonales AE et OD
AO = rayon	Tous les rayons du cercle sont égaux La hauteur d'un triangle isocèle est aussi médiane et médiatrice	AO=rayon, OE=rayon AO = OE Le triangle AOE est isocèle H est milieu segmentAE	*Appréhension opératoire du triangle AOE

Avant de présenter l'analyse du protocole au moyen du mécanisme centré sur l'énoncé, il semble nécessaire faire la considération suivante. Comme on verra dans la suite, le processus de résolution du protocole de Camille et Gaëlle débouche par un double perspectif : d'une part le point de vue de Gaëlle qui semble s'ancrer sur le mécanisme centré sur le dessin, d'autre part le point de vue de Camille qui semble s'adapter mieux au mécanisme centré sur l'énoncé. Or, comme le processus de Camille semble être dominant par rapport à celui de Gaëlle et comme à partir de l'intervention [42] le processus de résolution du problème suit la ligne commune du mécanisme centré sur l'énoncé, nous conduirons l'analyse du processus en assumant qu'il relève des caractéristiques d'un mécanisme centré sur l'énoncé.

4.1 Étape 1: Évocation du théorème

Dans le protocole de Camille et Gaëlle, l'étape 1 du mécanisme centré sur l'énoncé concerne les interventions [9] ÷[12]. De l'intervention [9] à l'intervention [11] le processus de résolution est conduit par Gaëlle, c'est pourquoi ces interventions concernent le recueil d'informations par appréhension perceptive et opératoire du dessin. L'intervention [12] consiste en l'évocation du théorème. Dans cette intervention, l'évocation du théorème a lieu suite à la relecture de la question du problème à l'aide de la fonction d'association du langage, activée par le mot déclencheur « losange ». Dans ce qui suit nous analyserons l'aspect fonctionnel du langage aussi que la valeur des propositions énoncées.

<u>Analyse fonctionnelle du langage de l'intervention [9] à l'intervention [11]</u>

La **fonction référentielle** de centaines mots où on a à désigner des objets est mise en évidence par l'appréhension perceptive et opératoire à la base de l'intervention [9] .

Dans cette intervention on remarque la présence de mots utilisés en déictique pour indiquer les unités figurales, les segments [AO] et [AD] « ça est égal ça (*Gaëlle indique les segments AO et AD) »*. Evidemment l'opération relève d'une désignation pure, (ces segments ne sont pas nommés), mais non une catégorisation simple car les classes auxquelles les objets appartiennent (segments, côtés d'un polygone, rayons du cercle…) ne sont pas spécifiées. L'appréhension opératoire au moyen de laquelle est isolée la sous-configuration du quadrilatère (« ça c'est un parallélogramme ») est associée soit à l'opération de désignation (par le mot « ça » qui est utilisé en déictique) soit à l'opération de catégorisation, (par l'expression « être un parallélogramme »). En effet, comme cette expression désigne l'objet lié à l'expression d'une propriété (être parallélogramme), elle relève d'une opération de catégorisation même si l'opération de désignation associée au mot « parallélogramme » ne s'adresse pas nécessairement au même objet. Ainsi, le mot « parallélogramme » qui intervient en [9] désigne l'objet du problème car il est tiré de l'appréhension opératoire du dessin, tandis que le même mot (parallélogramme) de l'intervention [10], semble être associé à un objet théorique car il participe d'un référent théorique (même s'il n'est pas verbalisé de façon complète). La fonction référentielle donc, est engagée pour désigner objets différents: l'un qui ressort du dessin, l'autre qui renvoie au référent théorique. La fonction référentielle reste donc, dans les deux interventions, liée au signifié associé par le sujet à l'objet désigné. Ainsi, les rapports entre le dessin et son référent (restreints pour le moment à l'opération de catégorisation) construits par le sujet lecteur du dessin, constituent le signifié de la figure géométrique associée pour ce sujet. Il est intéressant de noter ici comment la verbalisation du mot « parallélogramme » joue un rôle entre le parallélogramme « hic et nunc » objet du problème, et le parallélogramme objet géométrique de la théorie. C'est en quelque sorte une association entre le dessin et le référent théorique générique qu'a permis la verbalisation « parallélogramme »

Analyse de la valeur des propositions de l'intervention [9] à l'intervention [11]

Les propositions de l'intervention [9] n'ont une **valeur** que liée à leur contenu (valeur épistémique sémiotique) car elles constituent une juxtaposition d'informations et, donc, elles se présentent en tant que juxtaposition de propositions indépendantes. Les informations juxtaposées sont : AO=AD, OADE parallélogramme, AO=OE=AD. Certaines des propositions rendant compte de ces informations ont un statut opératoire de portée locale restreinte à l'inférence tirée du dessin (« …**donc** ça fait un parallélogramme »). En effet, le statut de prémisse est assigné à la proposition « …AO égal OE égal AD », issue des données du problème (car le dessin est codé) et pour autant considérée a priori comme « vraie », tandis que le statut de conclusion est assigné à la proposition « …ça fait un parallélogramme ». En nous appuyant sur l'idée de Duval avancée au Chapitre II, la conclusion « ça fait un parallélogramme » étant évidente par une procédure de constatation visuelle, est automatiquement vraie.

Or, comme l'objet réferent n'appartient pas au domaine théorique mais est relatif à l'objet actualisé du dessin, l'inférence n'a pas besoin d'un énoncé tiers pour passer des prémisses à la conclusion, c'est pourquoi aucune proposition formulée ici ne relève d'un statut théorique.

On remarque comment les interventions [9] et [10] ne suscitent pas à l'évocation d'un théorème utile pour aboutir à la solution, car elles ne concernent pas une opération d'appréhension discursive[3].

[3] Rappelons que Duval définit l'appréhension discursive « une explicitation des autres propriétés mathématiques d'une figure que celles indiquées par la légende ou par les hypothèses. Cette explicitation est de nature

Analyse fonctionnelle du langage dans l'intervention [12]

On reconnaît l'opération de catégorisation de la fonction référentielle car on assigne au quadrilatère la propriété d'être un losange. Mais l'objet auquel le terme « losange » s'adresse n'est pas le même dans les deux interventions [11] et [12]. En effet, le terme « losange » en [11] renvoie à l'objet du problème car il est tiré par l'appréhension perceptive du dessin, tandis que le même terme, apparaissant dans l'intervention [12], renvoie à l'objet théorique de la question du problème car il participe de la verbalisation d'un théorème. Par conséquent, le signifié associé par le sujet à l'objet désigné et auquel l'opération de catégorisation s'adresse, est bien différent en [11] ou en [12] mais il est quand même vraisemblable penser que justement l'évocation du terme « losange » en [11] favorise l'évocation du même terme en [12] par un processus semblable à celui analysé pour le mot « parallélogramme ». C'est justement le mot « losange » qui déclenche en [12] l'évocation du théorème.

Il ressort de ce qu'on vient de dire, que certains mots activent la **fonction d'association du langage**, en recouvrant le rôle d'une sorte « d'étiquette ». C'est pourquoi, nous qualifions ce type de mots **« mots étiquette »,** la définition en sera fournie au Chapitre VI (paragraphe 1.1.5.2). La fonction d'association du langage semble déboucher à partir des relations géométriques reliant éléments de base de la sous-configuration « quadrilatère » isolée dans le dessin (« AE perpendiculaire à OD » et « AD=OD ») et à partir de l'usage de certains mots étiquette. Donc, il semble vraisemblable de confirmer, au moins dans ce cas, l'existence d'un mot déclencheur qui avait été envisagée a priori dans la description des mécanismes de résolution du problème.

Analyse de la valeur des propositions énoncées dans l'intervention [11]

Le statut de la proposition en [11] est évidemment celui de conclusion par rapport à l'inférence, de portée locale, issue de l'intervention [9]. Pour autant, cette proposition étant tirée d'une constatation visuelle, sa valeur est automatiquement vraie.

4.2 Étape 2 : Verbalisation du théorème

Nous reconnaissons dans l'intervention [12] l'étape 2 du mécanisme centré sur l'énoncé concernant la verbalisation du théorème[4] utile à la résolution. Nous analyserons dans ce qui suit les valeurs des propositions énoncées dans cette intervention.

---

déductive » (Duval, 1994)

[4] Dans les résultats de recherche qui seront présentés au Chapitre VI, nous qualifierons ce type de théorèmes des « théorèmes pilote » car ils permettent de définir un projet de résolution. Pour une définition détaillée nous renvoyons ainsi au paragraphe 1.1.2.2. du Chapitre VI

Valeur des propositions

La verbalisation du théorème est correcte et complète. Elle impose aux propositions composant son énoncé un statut opératoire (d'hypothèse ou de conclusion) et une valeur logique qui n'est pas liée à leur contenu. La valeur épistémique des propositions correspondant aux hypothèses à vérifier est évidemment « Indéterminé » et la phrase concernant la verbalisation du théorème en [12] relève d'un statut théorique qui va devenir opératoire par rapport à la démonstration. Les Prémisses du théorème verbalisé sont :

1) Les diagonales se coupent dans leur milieu
2) Les diagonales sont perpendiculaires

La conclusion est « le quadrilatère est un losange ».

En outre, la structure de l'énoncé du théorème impose, même aux propositions exprimant les informations recueillies précédemment par appréhension opératoire sur le dessin (Gaëlle), le statut opératoire de prémisses. Cela rend possible la comparaison entre l'ensemble des propositions exprimant les prémisses du théorème, l'ensemble des propositions exprimant les propriétés géométriques tirées du dessin et l'ensemble des propositions exprimant les données de l'énoncé car, toutes les propositions relèvent du même statut de prémisses. Mais, même si les propositions exprimant les prémisses du théorème et celles relevant des données de l'énoncé possèdent le même statut, elles diffèrent par leurs valeurs: la valeur des prémisses du théorème est « *indéterminé* » (en effet il faudra les vérifier) tandis que la valeur des données est « *vrai* ». Ainsi, la comparaison entre l'ensemble des prémisses du théorème et l'ensemble des données, permet de changer la valeur « indéterminé » de certaines prémisses qui trouvent dans les données leur justification immédiate. Par exemple, dans l'intervention [15], on trouve la justification immédiate d'une prémisse du théorème (les diagonales sont perpendiculaires) sur la base des données du problème. C'est pourquoi, la proposition « les diagonales sont perpendiculaires » prend de suite la valeur « vrai ».

La comparaison entre les données du problème et l'hypothèse du théorème verbalisé permet aussi d'identifier les prémisses supplémentaires de l'hypothèse qui doivent être satisfaites pour qu'on puisse appliquer le théorème. Ainsi, aux propositions correspondantes restera assigné la valeur « *indéterminé* ». À cette étape, l'unique prémisse ayant la valeur « indéterminé » est « les diagonales se coupent dans leur milieu »

4.3 Étape 3 : Appréhension opératoire sur le dessin

Les interventions [16]÷[66] constituent l'étape 3 du mécanisme centré sur l'énoncé. En effet, les relations géométriques exprimées par l'hypothèse du théorème verbalisé (diagonales perpendiculaires qui se coupent dans leur milieu) sont reconnues sur le dessin grâce à l'appréhension opératoire et discursive du dessin. Cette appréhension opératoire du dessin est guidée par la verbalisation du théorème car on cherche à reconnaître sur le dessin les relations géométriques requises dans l'hypothèse et seulement celles-là.. Nous reconnaissons la fonction de guide du langage dans le processus de résolution, en raison du guidage que la verbalisation du théorème exerce sur l'appréhension opératoire du dessin.

Analyse fonctionnelle du langage de l'intervention [16] à l'intervention [39]

Comme nous l'avons anticipé au début de l'analyse du protocole, le processus de résolution du problème se développe en suivant deux démarches parallèles, l'une propre à Camille et l'autre propre à Gaëlle. À l'intervention [42] les deux démarcher se réunissent en formant un processus commun de résolution. Or, dans la phase du processus de l'intervention [16] à l'intervention [39] les deux démarches sont remarquables : celle de Camille, guidée par la structure du théorème, est pilotée par la vérification des seules prémisses manquantes, et celle de Gaëlle est dédiée au seul recueil d'informations par l'appréhension opératoire du dessin, sans être guidée par la structure d'un théorème. En effet, les interventions de Gaëlle relèvent d'une juxtaposition de propositions indépendantes qui renvoient à une juxtaposition d'informations indépendantes.

Dans cette phase du processus, l'appréhension opératoire conduite par Camille semble être guidée par la structure du théorème verbalisé. Cette structure, en imposant différents statuts opératoires aux propositions de l'énoncé du théorème (hypothèses ou conclusion), guide en effet l'identification sur le dessin des seules relations géométriques demandées dans les prémisses : « les diagonales se coupent en leur milieu ». C'est pourquoi, l'appréhension opératoire sur le dessin concernera d'abord l'identification d'une ou plusieurs sous-configurations où les segments AE et OD sont des diagonales, et, en suite, l'identification des relations géométriques entre ces deux segments associées au fait qu'ils se coupent dans leur milieu. On relève ici la **fonction de guide** du langage imposée par la structure du théorème, en accord avec l'hypothèse avancée a priori dans la description des mécanismes : on recherche toutes les relations géométriques requises dans les prémisses et seulement celles-là.

Nous relevons également la fonction de guide aux interventions [15], [21], [23] et [39] comme nous l'avons marqué dans la transcription du protocole (légende du tableau au paragraphe 2 de ce chapitre) par une bande foncée et le caractère `courier`.

Valeurs des propositions de l'intervention [16] à l'intervention [39]

Dans cette phase, les interventions de Gaëlle sont caractérisées par l'appréhension opératoire du dessin finalisée par le recueil d'informations ([30] : « on sait jamais, ça peut toujours servir ») et la progression du discours se fait par juxtaposition de propositions indépendantes[5] : le passage d'un énoncé à l'autre dépend, dans certains cas, de leur contenu (voir les interventions [16] et [26] où l'inférence est tirée du dessin). Les propositions, n'étant pas liées les unes aux autres, ne possèdent pas de statut opératoire jusqu'à ce qu'elles deviennent hypothèses ou conclusions grâce à l'évocation d'un théorème. Mais, dans certaines cas, les propositions peuvent être liées les unes aux autres par un lien de portée locale (car le lien ne participe pas d'un enchaînement de pas de déduction). Dans l'intervention [16] la valeur de ces propositions est « vrai » à cause de leur évidence perceptive due à la constatation visuelle, mais les propriétés exprimées ne sont pas démontrées. Par exemple, dans l'intervention [26] la propriété « AEB est un triangle rectangle » relève d'une certitude issue de la seule constatation visuelle, autrement dite appréhension perceptive. Evidemment la valeur des propositions des interventions de Camille, est « indéterminé » car elles constituent les hypothèses à prouver.

Sur la base de ces constations, le mode d'expansion discursive de cette phase relève du mode accumulation. En général, les interventions de Gaëlle dans cette phase (en particulier les interventions [16] et [36]) participent d'une diversion en restant au niveau d'une expansion discursive de type accumulation, comme on verra dans le paragraphe 1.5.1.

L'étape 3 du mécanisme centré sur l'énoncé concerne la partie centrale du processus de résolution. C'est pourquoi, nous présenterons l'analyse détaillée des interventions saillantes.

4.3.1 Analyse détaillée de l'étape 3

Intervention [16]

Cette intervention est caractérisée par l'appréhension opératoire et discursive du dessin : l'appréhension opératoire permet d'isoler sur le dessin la sous-configuration du quadrilatère, tandis que l'appréhension discursive du dessin (issue du codage du dessin) permet de dire que AD est égal à OE. Le domaine d'interprétation du dessin[6] relie la configuration « AD et OE » encore à l'idée de parallélogramme (voir l'intervention [9]), c'est pourquoi il ressort la nécessité (mise en évidence par la modalité «il faut ») de montrer le parallélisme entre ces deux cotés. Comme on verra dans le paragraphe suivant, n'étant pas le parallélisme entre les côtés une hypothèse à prouver d'un théorème verbalisé, la nécessité de montrer ce parallélisme ne relève pas d'une nécessité théorique mais elle relève plutôt d'un effet du

[5] Une séquence de propositions indépendantes peut être « AEB c'est rectangle » (26), « A, D, E points du cercle, AE perpendiculaire à OD, AO égal AD » (32).

[6] Comme « toutes les propriétés spatiales du dessin ne peuvent pas être interprétées comme renvoyant à des propriétés de l'objet, au dessin est attaché un *domaine d'interprétation.* » (C. Laborde & B. Capponi, 1994, p.172)

contrat didactique. En effet, le contrat didactique requiert de démontrer les relations géométriques obtenues par l'interprétation du dessin. L'appréhension opératoire caractérisant la deuxième phase de l'intervention permet d'isoler le triangle rectangle BAE par l'ajout du trait EB. Cette appréhension opératoire sert seulement pour recueillir des informations car elle ne vise pas montrer une prémisse d'un théorème. Nous remarquons une pluralité de valeurs associées aux propositions composantes cette intervention :

- « En fait ce côté c'est le même que celui là *(AD et OE)* …» possède la valeur « vrai » car l'information ressort des données du problème ;
- « …il faut dire qu'elles sont parallèles aussi… » possède une valeur « indéterminé »
- « …t'as jamais utilisé le triangle rectangle dans les cercles? ». Même si la proposition est sous forme interrogative, sa valeur est « vrai » car on ne met pas en discussion le fait que la sous configuration soit un triangle rectangle mais on met en discussion son usage, c'est-à-dire la capacité d'évoquer des théorèmes concernant le triangle rectangle.

Ces propositions, n'ayant pas un statut opératoire, ne sont pas liées les unes aux autres par une structure. C'est pourquoi, elles se présentent dans une juxtaposition de propositions indépendantes du point de vue logique.

Venons maintenant à l'analyse fonctionnelle du langage de l'intervention [16].
Du point de vue de la fonction référentielle, on remarque en [16] l'opération de catégorisation qui assigne les segments AD et OE à la classe des *côtés* d'un polygone. Cette opération n'exclut pas l'opération de désignation pure car les côtés sont quand même indiqués et ils ne sont pas nommés. Or, comme l'intervention est caractérisée par l'absence de verbalisation d'un théorème, on remarque que le besoin d'opérations discursives plus complexes, opérations telles la prédication, pour remplir une activité discursive plus complète, ne se fait pas sentire : en absence de verbalisation du théorème, il n'est nul besoins de relier l'expression d'une propriété ou d'une relation à l'expression désignant l'objet. En outre, puisque la sous-configuration du triangle rectangle isolée par l'appréhension opératoire sur le dessin n'est pas nommée, nous reconnaissons quand même une opération de catégorisation parce que la propriété d'être rectangle est associée à la sous-configuration (bien que la désignation du polygone « triangle rectangle » se réalise par des gestes).

……………………………………………………………………………………………

[*Intervention 19*]

Cette intervention se place dans le domaine théorique car Camille montre la dépendance de la propriété « côtés parallèles », proposée par le camarade dans l'intervention [16], au théorème qu'elle a proposé en [12]. En outre, Camille relance la nécessité de vérifier l'hypothèse manquante « les diagonales se coupent en leur milieu », en remarquant la valeur *Indéterminée* déjà assignée à cette proposition. On relève là, la fonction de guide du langage.

……………………………………………………………………………………..

[*Intervention 26*]

Nous remarquons comment, dans cette intervention, Gaëlle reste encore sur la sous-configuration du triangle rectangle en tant qu'information acquise et à garder : « on sait jamais, ça peut toujours servir ». En outre, l'opération de catégorisation qui relie au triangle la propriété d'être rectangle, est associée à la dénomination de l'objet « AEB ».

…………………………………………………………………………………….

Interventions [30]÷[38]

En général, ce groupe d'interventions est caractérisé par l'appréhension opératoire du dessin finalisée au seul recueil d'informations car l'appréhension opératoire n'est pas guidée par la verbalisation d'un théorème. Gaëlle revient sur l'appréhension opératoire du dessin et sur les données de l'énoncé du problème. Les interventions [36] et [38] ressemblent dans une certaine mesure à l'intervention [16] car l'appréhension perceptive du dessin amène à la conclusion que les segments AO et DE sont symétriques mais dans ces dernières interventions nous remarquons la présence du verbe « démontrer » qui relève cependant d'une nécessité de contrat. On remarque que les segments ne sont pas nommés mais indiqués par des mots qui sont utilisés en déictique et qu'ils ne participent pas d'une sous-configuration du quadrilatère : ils sont identifiés en tant qu'éléments de base (selon la définition de Duval) du quadrilatère. Le domaine d'interprétation du dessin permet d'inférer que les segments ont la même longueur « donc, en fait, c'est le même [segment]». Cette inférence (marquée par la présence du connecteur « donc ») est quand même de portée locale car elle ne participe pas d'une substitution et, de plus, n'est pas obtenue par un énoncé tiers permettant de passer de la prémisse à la conclusion. En outre, la prémisse (AO symétrique par rapport à DE) étant tirée d'une constatation visuelle, est automatiquement vraie et, donc, elle n'a pas à être prouvée. Dans l'intervention [38], par contre, il y a la présence d'un projet remarqué par la modalité « il faut » accompagnée du verbe « démontrer » et par l'adverbe « après », mais encore une fois ce projet, ne provient pas d'une verbalisation d'un théorème utile pour aboutir à la solution, comme on a remarqué pour l'intervention [16]. De façon générale, ce groupe d'interventions relève donc d'une accumulation.

……………………………………………………………………………………

[*Interventions 39*]

Dans cette intervention Camille, évoque la prémisse manquante en s'appuyant sur la fonction de guide exercée par la verbalisation du théorème. La présence de la modalité « il faut » dans cette intervention montre que la verbalisation du théorème pilote en [12] impose au langage, conjointement à la fonction de guide, une fonction de planification. Par le guidage de la verbalisation du théorème Camille ressort de la diversion issue de l'intervention de Gaëlle en proposant la prémisse manquante « AE et DO se coupent en leur milieu ».

…………………………………………………………………………………………..

[*Intervention 41*]

Dans cette intervention, la prémisse manquante est partagée (implicitement) en deux parties : « AE coupe OD dans son milieu », et « OD coupe AE dans son milieu ». Même si Camille renvoie évidemment à la théorie, car elle est dans le contexte référentiel d'un théorème précis, elle utilise des termes employés en anaphore qui jouent un rôle de « condensation » et non pas de dénomination (comme les mots utilisés en déictique) car ils renvoient à des objets déjà nommés aux interventions précédentes. Cette intervention assigne à la proposition « AE et OD se coupent en leur milieu » le statut opératoire de prémisse à justifier. L'opération de vérification des prémisses est donc démarrée par la recherche d'un énoncé tiers. Cette recherche est mise en évidence par l'expression : « Il nous faut dire que … » de l'intervention [39].

……………………………………………………………………….

[Interventions 42, 43]

Ces interventions concernent la recherche d'un énoncé tiers qui, à partir des données du problème et des informations recueillies, permet de conclure que « AE coupe OD dans son milieu » ou bien que « OD coupe AE dans son milieu ». La recherche de l'énoncé tiers porte sur l'appréhension opératoire du dessin qui permet d'isoler la sous-configuration du triangle OAD. Remarquons que c'est la première fois que Camille considère le dessin par une appréhension opératoire, et on remarque bien comment cette appréhension est guidée par la verbalisation du théorème contrairement aux appréhensions opératoires menées par Gaëlle. En revenant sur l'énoncé du problème, la donnée AD = OA permet de dire que le triangle OAD est isocèle mais cette information ne participe pas d'un projet structuré même si le triangle est mis en relation avec le segment [OD], objet de la prémisse manquante, car, pour le moment, elle est juste une information recueillie. Effectivement à partir de l'intervention [43] la relation entre le triangle isocèle et le segment [DO] est explicitée. Cela conduit à deux questions auxquelles il nous semble nécessaire répondre pour la suite de notre analyse :

1) Pourquoi le théorème sur le triangle isocèle, recouvrant le rôle d'énoncé tiers, n'a-t-il pas été verbalisé pour être utilisé au cours du processus de résolution ?
2) Quelles conditions ont-elles permis d'évoquer ce théorème ?

Abordons tout de suite la première question par rapport aux *interventions [44] ÷ [46]*. La définition « un triangle ayant deux côtés de la même longueur est isocèle », n'est pas verbalisée de façon complète et cela en accord avec l'hypothèse envisagée a priori selon laquelle **les théorèmes (définitions) en acte ou les théorèmes(définitions) bien connus des élèves, ne nécessitent pas toujours une verbalisation pour être utilisés de façon correcte**. La propriété « être isocèle » est alors associée au triangle OAD par une appréhension discursive sur le dessin, et elle relève d'une opération de catégorisation (au triangle est associé la propriété « être isocèle ») qui nous permet de reconnaître la fonction référentielle du langage. Or, en général, nous remarquons que les théorèmes que les élèves considèrent comme difficiles doivent être verbalisés de façon complète afin de pouvoir être utilisés de façon correcte, tandis que, les théorèmes que les élèves ne considèrent pas comme difficiles ou qui sont bien connus, n'ont pas besoin d'être verbalisés de façon complète pour être utilisés de façon correcte. Nous retenons donc qu'il y a un traitement différencié des théorèmes qui sera analysé de façon détaillée au Chapitre VI.

Venons-en maintenant à la deuxième des questions posées ci-dessus relatives aux conditions qui permettent l'évocation d'un théorème. La séquence des interventions [43], [44], [45] est très intéressante car elle relève d'une **fonction d'association du langage**. En effet, un mot qui joue le rôle de déclencheur, c'est-à-dire le rôle d' « étiquette », permet ici l'évocation du théorème car on associe la formulation (verbalisation) du mot (en tant que représentation langagière) à un théorème appartenant au système de connaissances des élèves (référent théorique). De façon précise, la séquence des informations « triangle isocèle, hauteur, médiane » (de l'intervention [42] à l'intervention [46]) est la « séquence standard », en France, des propriétés décrivant le triangle isocèle : une sorte de « comptine » associée à la définition et aux théorèmes du triangle isocèle. Alors, après avoir nommé le triangle isocèle, Gaëlle relie ce mot au mot « médiane ». Dès qu'elle a nommé la médiane, elle se rende compte que ce mot évoque le « point du milieu », et de là elle relie les mots « médiane »et « hauteur » au concept de « triangle isocèle ».

……………………………………………………………………………………………

Interventions [49] ÷[59]

L'appréhension opératoire qui suit, vise à isoler le triangle isocèle ADO, sa hauteur et sa médiane AH, pour arriver à reconnaître la propriété que la hauteur d'un triangle isocèle est aussi médiane et donc qui elle coupe la base en deux parties égales (interventions [49], [50], [57], [58], [59]).

Les informations recueillies dans le domaine d'interprétation du dessin (interventions [42] ÷ [46], « AH médiane, médiatrice et hauteur ») acquièrent le statut de conclusion par rapport au théorème (*) « dans un triangle isocèle, la hauteur est aussi médiane et médiatrice du côté opposé » et pour cela elles ont valeur « vrai ».

……………………………………………………………………………………

Interventions [60], [65] et [66]

Une des parties de la prémisse manquante « les diagonales se coupent dans leur milieu » vient d'être démontrée. En effet, la prémisse « AE coupe OD dans son milieu » a été vérifiée en utilisant le théorème (*) et donc possède la valeur « vrai ». Remarquons que les segments sont nommés et pour cela, la fonction référentielle est ici remplie par l'opération de désignation [60]. Or, la fonction de guide du langage issue de la verbalisation du théorème, permet de relever qu'il faut encore prouver « OD coupe AE dans son milieu ». À la fonction de guide est associée la fonction de planification au moyen de laquelle Camille déclare qu'il faut procéder de la même façon qu'à l'avance lorsqu'on a montré « AE coupe OD dans son milieu » : il faudra isoler la sous-configuration d'un triangle isocèle pour y appliquer le même théorème « la hauteur d'un triangle isocèle est aussi es médiane et médiatrice».

Dans l'intervention [65] l'appréhension opératoire est guidée par le théorème (énoncé tiers) car il s'agit d'associer aux segment AO et OE une sous-configuration permettant d'isoler un triangle qui soit isocèle. Il est intéressant de remarquer ici que Camille cherche à avoir AO=OE par analogie avec le processus précédant mais elle ne voit pas comment l'obtenir car ce n'est pas donné (« mais, comment on sait que c'est égal ?). La propriété d'être isocèle pour le triangle AOE, passe par l'énoncé tiers « les rayons d'un cercle ont tous la même longueur » (intervention [66]) qui n'est pas verbalisé mais utilisé de façon implicite.

4.4 Étape 4 : Retour à l'énoncé du théorème

Les interventions [81]÷ [84] constituent l'étape 4 du mécanisme centré sur l'énoncé.

Les assertions qui expriment les propriétés géométriques requises dans les hypothèses possèdent la valeur « *vrai »,* car elles ont été démontrées au cours du processus. Ainsi, elles permettent d'appliquer le théorème verbalisé dans l'intervention [12].

Analyse fonctionnelle du langage de l'intervention [81] à l'intervention [84]

Dans cette séquence d'interventions, on revient à l'énoncé du théorème verbalisé dans l'intervention [12] et on l'écrit comme conclusion du protocole et cela relève d'un effet du contrat.

De cette analyse nous retenons donc, que les fonctions du langage prennent du sens grâce aux mécanismes : il est lors des passages entre une étape et l'autre du mécanisme que les fonctions du langage et le changement des valeurs des propositions sont repérés.

5. Modes d'expansion discursive dans le processus de résolution

Comme nous l'avons avancé aux chapitres II et III, l'évolution des modes d'expansion discursive peut être favorisée par les usages différents d'une même unité linguistique. C'est pourquoi, l'occurrence de cette unité dans deux différents modes d'expansion discursive et ses usages différents par rapport au mode d'expansion auquel elle appartient, seront retenus comme outils d'analyse pour relever l'évolution des modes d'expansion discursive. Rappelons que pour nous l'*accumulation* concerne une juxtaposition d'informations issues par l'interprétation du dessin ou par inférences de portée locale. La *substitution*, par contre, concerne le recyclage des pas de déduction puisque la conclusion d'un pas est reprise comme prémisse du pas suivant.

En outre, l'analyse conduite à l'aide du modèle « démarche de résolution » et développée dans le paragraphe 3, permet de comprendre dans quelle mesure l'expansion discursive d'accumulation et de substitution conditionnent la rédaction finale de la solution. En effet, le modèle « démarche de résolution » permet de vérifier lesquels, parmi les pas de déduction faits pendant l'accumulation et la substitution, sont retenus dans la rédaction finale[7]. Ce modèle permet aussi de vérifier comment ces déductions sont systématisées en un enchaînement de pas de substitution. En effet, ce modèle d'enchaînement d'unités de base rendant compte du processus de résolution, permet d'identifier et d'isoler à la fois chaque pas de déduction effectué dedans les unités (question-réponse) et leur enchaînement dans le déroulement du processus. Cela permet donc de reconnaître où l'expansion discursive d'accumulation et de substitution s'exercent, mais, en même temps, il constitue l'outil pour analyser la mise en ordre des pas de déductions faites pendant l'accumulation et la substitution (cf. Chapitre III)

Sur la base des considérations faites ci-dessus, nous nous proposons de poursuivre dans ce paragraphe, les deux objectifs suivants :

1. reconnaître les différentes modes d'expansion discursive sur la base des définitions

[7] Les pas de déduction qui ne sont pas retenus dans la rédaction finale peuvent participer d'une diversion comme nous l'avons montré lors de la modélisation du processus au moyen du modèle « démarche de résolution »

données au Chapitre III (Tableau 3.5 et Tableau 3.6) et sur la base des outils dont on dispose (par exemple, l'occurrence et l'usage de certaines unités linguistiques).
2. reconnaître le passage d'un mode d'expansion à l'autre.

1.5.1 Évolution des modes d'expansion discursive

Avant d'entreprendre la description détaillée de l'évolution des modes d'expansion discursive qui se déploient dans ce processus, nous en présenterons une description dans les grandes lignes.
Notre analyse se développera alors en quatre phases :

- dans la première phase du processus (Interventions [1]÷[38]) nous reconnaissons le mode d'expansion discursive « accumulation » en tant que simple juxtaposition de propositions relevant d'informations tirées de l'interprétation du dessin ou par des pas de déduction ;
- dans la deuxième phase du processus (Interventions [39] ÷ [46]) nous reconnaissons le mode d'expansion discursive accumulation, car l'appréhension opératoire du dessin permet de recueillir des informations, mais cette appréhension est guidée par la recherche des propriétés géométriques requises dans les hypothèses du théorème verbalisé.
- dans la troisième phase du processus (Interventions [47] ÷ [59]) nous reconnaissons le mode d'expansion discursive substitution concernant l'enchaînement de pas de déduction nécessaires pour prouver l'hypothèse « AE coupe OD en son milieu » du théorème verbalisé en [12]
- dans la quatrième phase du processus (Interventions [60] ÷ [72]) nous reconnaissons le mode d'expansion discursive substitution concernant l'enchaînement de pas de déduction nécessaires pour prouver l'hypothèse « OD coupe AE en son milieu » du théorème verbalisé en [12]

<u>PREMIERE PHASE</u>

Les interventions [1] ÷ [38] relèvent d'une accumulation car les propositions sont juxtaposées. Puisque ces propositions concernent des informations (relations géométriques, propriétés géométriques…) il en résulte une juxtaposition d'informations indépendantes (les informations ne sont pas liées les unes aux autres que par leur contenu).
Par exemple, **l'intervention [9]** relève de la juxtaposition de propositions indépendantes :
« ça est égal ça (*en indiquant AO et AD) »,* « ça c'est un parallélogramme », « AO égal OE égal AD donc ça fait un parallélogramme ».

Voyons quelles sont les informations indépendantes contenues dans ces propositions :

- « ça est égal ça (*AO=AD*) » : la proposition traduit en langage naturel la relation d'égalité entre les segments [AO] et [AD] exprimée en langage symbolique sur le dessin (l'information est codée sur le dessin par des marques) ainsi que dans la liste de données à côté du dessin (AO=AD). La valeur des propositions est évidemment « vraie » car l'information est issue des données du problème.
- « ça c'est un parallélogramme » : l'information est obtenue d'une appréhension perceptive du dessin donc la proposition assume valeur épistémique de certitude justement parce qu'elle est relevée d'une constatation visuelle « évidente » .
- « AO égal OE égal AD donc ça fait un parallélogramme » : l'information est obtenue au moyen d'une inférence tirée du dessin (interprétation du dessin), c'est pourquoi elle assume une valeur épistémique de certitude.

Dans ce qui suit, nous essayerons de reconnaître le mode accumulation, en nous appuyant sur les critères définissant les modes d'expansion discursive relatifs à l'usage de certaines unités linguistiques. Par exemple dans l'intervention [9], nous remarquons d'abord la présence du mot utilisé en déictique « ça » dans la première proposition ainsi que dans la deuxième. Le mot remplace la dénomination des segments [AO] et [AD] dans la première proposition tandis que dans la deuxième proposition il remplace la dénomination du parallélogramme. Le mot utilisé en déictique accompagné par le temps présent indicatif du verbe « être » signale que la proposition assume une valeur épistémique dont <u>le contenu apparaît certain</u>.

Dans **l'intervention [11]** aussi, la proposition « …c'est un losange » n'est pas liée aux propositions de l'intervention précédente. L'information contenue dans cette proposition est tirée de l'appréhension perceptive du dessin (présence du déictique « c'est ») qui assigne à la proposition même une valeur certaine. Le présent indicatif du verbe « être » souligne et en même temps renforce cette valeur.

L'intervention [16] relève de la juxtaposition de propositions indépendantes :

« En fait ce côté c'est le même que celui là *(AD et OE)* », « il faut dire qu'elles sont parallèles aussi », « t'as jamais utilisé le triangle rectangle dans le cercle? Je ne sais plus ».

Les informations indépendantes que nous pouvons relever dans ces propositions sont :

- « En fait ce côté c'est le même que celui là *(AD et OE)* » : la proposition traduit en langage naturel la relation d'égalité entre les segments [OE] et [AD] exprimée en langage symbolique sur le dessin (l'information est codée sur le dessin par des marques). La valeur de la proposition est « vraie » car l'information est issue des données du problème.

- « il faut dire qu'elles sont parallèles aussi » : la relation de parallélisme entre les côtés AD et OE résulte d'une évidence perceptive due au fait que l'appréhension opératoire du dessin a permis d'isoler la sous-configuration du quadrilatère OADE. « Il faut » indique que l'information est en projet d'être vérifiée et pour cela la valeur des propositions est *indéterminé*.
- « t'as jamais utilisé le <u>triangle rectangle</u> dans le cercle? Je ne sais plus » : l'information « BAE triangle rectangle » est obtenue par l'interprétation du dessin. En effet, il résulte évidente que la propriété du sommet en E tel que l'angle AEB soit de 90°, renvoie au théorème « tous les angles inscrits dans une demi-cercle sont droits ». La valeur de la proposition est pour autant *vraie.*

Remarquons la présence de la modalité « il faut » que, comme on l'a dit a priori, n'est pas spécifique d'un seul mode d'expansion discursive. Les différentes raisons de son usage, permettent de définir plusieurs usages des unités linguistiques (cf. paragraphe 3.3.4 du Chapitre III). En cette intervention la modalité *falloir* relève d'une nécessité de contrat et cela est mis en évidence ce qui figure autour de la modalité même : elle est précédée par des termes utilisés en déictique renvoyant au dessin, et elle est dépassée par une interprétation du dessin. Or, même si l'élève est bien loin d'être dans le contexte théorique (par exemple, lorsqu'il y a la nécessité de vérifier les hypothèses d'un théorème verbalisé) il est conscient qu'il n'est pas acceptable de prendre pour « vraie » une propriété qui n'a pas été prouvée. C'est pourquoi, il se propose de la démontrer.

La juxtaposition d'informations que nous pouvons relever par la juxtaposition de propositions indépendantes, est évidente lors des **interventions [26], [30], [34] et [36].** Les propositions « on sait jamais ça peut toujours servir » et « je ne sais pas si ça serve à quelque chose, mais on sait jamais » mettent clairement en évidence le fait que Gaëlle est en train de recueillir des informations sans qu'elles soient contextualisées dans un projet. Cela renforce l'idée qu'on est en présence d'un développement discursif de type accumulation. Or, les propositions indépendantes appartenant aux interventions ci-dessus sont : « regarde ce qu'on peut dire: que AEB c'est rectangle », «tien regarde ça c'est symétrique par rapport à ça (*AO et DE)* donc en fait c'est le même », « A, D, E points du cercle », « AE perpendiculaire *(à OD)* » et « AO égal AD ». Les informations indépendantes que nous pouvons relever dans ces propositions sont :

- « AEB c'est rectangle » : information déjà acquise à l'avance par une déduction où l'énoncé tiers était implicite, est obtenue ici par l'évidence perceptive qui maintient « vraie » la valeur de la proposition.

- «tiens regarde ça c'est symétrique par rapport à ça (*AO et DE)* donc en fait c'est le même » : la symétrie des côtés AO et DE est une information obtenue par une constatation visuelle. Ceci permet d'assigner à la proposition correspondante la valeur épistémique s de certitude. De plus, nous remarquons ici une inférence tirée du dessin qui associe aux segments AO et DE une relation d'égalité aussi. C'est pourquoi, à la proposition est automatiquement assignée la valeur *vraie* et c'est pourquoi elle ne sera jamais prouvée.
- « AE perpendiculaire [à OD] » et « AO égal AD » : sont enfin informations tirées des données du problème et pour autant les propositions correspondantes assument valeur vraie.

Remarquons encore la présence de mots utilisés en déictique qui remplacent la dénomination des côtés AO et DE, et remarquons en outre la présence des verbes renvoyant à la perception tel que « regarder » (interventions [26] et [36]). Les occurrences du verbe « regarder » sont accompagnées par une inférence tirée du dessin : « regarde ce qu'on peut dire : que AEB c'est rectangle » [26], ou encore « regarde, ça c'est symétrique par rapport à ça… » [36]. Cette combinaison « verbe renvoyant à la perception + interprétation du dessin » est susceptible de signaler le mode d'expansion discursive de type accumulation.

Nous remarquons en outre, la présence du pronom « *on »* dans les deux interventions [26] et [36]. Ces interventions sont dans un mode accumulation, et ce serait en contradiction avec l'hypothèse avancée a priori selon laquelle le pronom indéfini « on » indique un énonciateur universel relevant d'une substitution. L'emploi du « on » relève d'une nécessité de contrat et non pas d'une nécessité théorique. En effet, le contrat didactique impose souvent l'usage d'un pronom universel dans le contexte d'une déduction, et, comme l'élève est en train de tirer une inférence du dessin qu'il interprète en tant que pas de déduction, il en ressort la nécessité contractuelle d'un pronom indéfini.

L'accumulation qui constitue le mode d'expansion discursive de l'intervention [16] a des caractéristiques différentes de l'accumulation en [36] et [38] (voir le Tableau 3.5 du chapitre III). Ces caractéristiques relèvent de l'usage de la modalité « falloir », de l'usage des verbes tels « dire » ou « démontrer » et de la fonction de condensation[8] des mots utilisés en anaphore. Dans l'intervention [36] on remarque des traces renvoyant à la déduction car Gaëlle utilise pour la première fois le verbe « démontrer » qui servira dans l'intervention [38] pour décrire un projet. Dans cette intervention, on remarque aussi la présence d'un adverbe

[8] Ces mots fonctionnent en anaphore car condensent plusieurs données pour ne perdre pas le fil du raisonnement déductif (définition fournies au Tableau 3.5). Ces termes fonctionnent fréquent dans le mode substitution, l'anaphore étant par essence un procédé substitutif.

temporel « après » qui impose un ordre temporel aux opérations composant le projet du pas de résolution. L'ordre temporel va coïncider avec l'ordre séquentiel des opérations. Cela serait en contradiction avec l'hypothèse avancée a priori selon laquelle les adverbes temporels constituent des marques linguistiques pour la seule juxtaposition des informations. Il ressort de ce qu'on vient de dire, que les adverbes temporels seront ajoutés dans la liste des unités linguistiques relevant des pas de déduction d'une accumulation. Dans l'intervention [38], la modalité « falloir », accompagnée du verbe « démontrer », ne relève pas d'une nécessité théorique, non seulement parce que dans les interventions précédentes les éléments du dessin sont encore indiqués par des mots utilisés en déictique et par des gestes et que l'inférence est tirée de l'interprétation du dessin, mais surtout parce qu'elle ne dépend pas de la verbalisation d'un théorème utile à la résolution. Le projet, donc, n'est pas guidé de cette verbalisation.
La présence du terme « celui-là » en [38] relève maintenant du rôle de condensation qui nous avons défini a priori comme caractérisant une accumulation (lorsqu'on a des pas de déduction). En effet, le mot « celui-là » fonctionne en anaphore car remplace la dénomination d'un coté qui a été nommé dans l'intervention précédente[9].

Comme on vient de le dire, cette phase du processus relève d'une accumulation mais l'accumulation caractérisant les interventions de Gaëlle et est bien différente de l'accumulation caractérisant les interventions de Camille. En effet, Les interventions de Gaëlle ne sont pas guidées par la verbalisation d'un théorème. Donc, Gaëlle recueille les informations surtout par appréhension perceptive du dessin. C'est pourquoi, le mode d'expansion discursive caractérisant la plupart de ses interventions est une simple juxtaposition de propositions indépendantes. Dans les interventions de Camille, par contre, le recueil d'informations par appréhension opératoire passe par le guidage de la verbalisation du théorème (verbalisation du théorème en [12]). Ainsi dans l'intervention [15] une hypothèse du théorème a été vérifiée tout de suite au moyen des données de l'énoncé, mais l'autre hypothèse sera vérifiée sur la base de l'appréhension opératoire et discursive guidée de la verbalisation de l'hypothèse même : il faudra reconnaître sur le dessin les seules relations géométriques requises dans cette hypothèse manquante.

<u>DEUXIEME PHASE</u>

Dans la deuxième phase du protocole concernant les interventions [39] ÷ [46], le processus

---

[9] Au même titre sont utilisés les mots en [39], [41] et [46].

de résolution de Gaëlle et celui de Camille se rejoignent à partir de l'intervention [42]. Dans cette phase nous pouvons reconnaître encore le mode d'expansion discursive de type accumulation en tant que juxtaposition de propositions indépendantes. Ces propositions relèvent en effet d'une juxtaposition d'informations indépendantes mais, par rapport à la première phase du processus, ces informations sont obtenues par l'appréhension opératoire du dessin guidée par la verbalisation du théorème soit de la part de Camille soit de la part de Gaëlle.

L'intervention [39] ainsi que **l'intervention [41],** comme nous l'avons remarqué dans l'analyse du paragraphe 1.4 de ce chapitre, relèvent de la fonction de guide du langage. L'**intervention [42]** concerne la juxtaposition d'informations indépendantes ayant comme objectif celui de reconnaître la relation « se coupent en leur milieu » entre les segments AE et OD. Les propositions indépendantes de l'intervention [42] sont :

« Attend, AO égal AD… », « et si on prouve que le triangle DAO est isocèle… parce que ça fait quelque chose, tu sais, par rapport à ça *(DO) »* . Or, si l'information AO=AD est tirée des données du problème et pour autant la proposition assume valeur *vraie*, l'information « DAO est isocèle » est obtenue par l'interprétation du dessin et la valeur de la proposition est clairement *indéterminée*, car le but semble être de prouver cette information tirée de l'évidence perceptive. Le connecteur « parce que » qui apparaît dans cette proposition, souligne que la sous-configuration du triangle DAO est mise en relation avec le segment OD pour vérifier les relations géométriques requises dans l'hypothèse à prouver. Cela confirme que l'appréhension opératoire du dessin est guidée par la verbalisation du théorème pilote.

Dans les **interventions [43], [44] et [45]** les propositions apparaissent en tant que propositions indépendantes même si l'appréhension opératoire du dessin qui permet d'en obtenir des sous-configurations, consent de mettre en évidence des relations géométriques entre unités figurales : « la hauteur [du triangle OAD] est médiane aussi ». Les informations contenues dans ces interventions sont obtenues de l'interprétation du dessin et pour autant les propositions correspondantes ont donc la valeur « *vrai ».* Remarquons que le temps présent indicatif du verbe être renforce la valeur vraie des propositions.

TROISIEME PHASE

À **l'intervention [46]** démarre le mode d'expansion discursive de type substitution qui caractérisera le développement discursif du processus jusqu'à la fin. Les propositions de cette troisième phase (de l'intervention [46] à l'intervention[59]) sont liées les unes aux autres par des inférences. De plus, on peut repérer le recyclage dans l'enchaînement des pas de déduction : la conclusion d'un pas est prise comme prémisse du pas suivant (voir tableau ci-dessous). Or, pour passer des prémisses à la conclusion d'un pas de déduction il faudra un énoncé tiers, et c'est justement la recherche des énoncés tiers qui nécessite d'une accumulation.

En outre, les deux phases finales du processus, que nous avons appelé le troisième et quatrième phase, sont caractérisées par le fait que l'élaboration du processus de résolution se développe en parallèle avec la rédaction de ce processus. C'est pourquoi, on peut reconnaître certain pas d'accumulation et la substitution, même dans la rédaction finale de la résolution.

Nous proposons dans le tableau ci-dessous, l'analyse des pas de substitution qui, à partir des données du problème et des informations recueillies pendant l'accumulation, permettent de démontrer l'hypothèse manquante « AE coupe OD en son milieu » (H est milieu de OD)

42 C: Attends, <u>AO égal AD</u> *(elle revient aux données codées sur le dessin)* ….. et si on prouve que le triangle DAO est isocèle,… parce que ça fait quelque chose, tu sais, par rapport à ça *(DO)*	[42] α : AO=AD α → β : Si AO=AD alors le triangle OAD est isocèle --- **β : OAD est isocèle**
43 G: ouais, parce que c'est la hauteur 44 C: ouais, c'est la hauteur 45 G: ouais, c'est aussi la médiane …….AH OUI 46[10] C: ça veut dire, comme ça c'est la hauteur dans un triangle isocèle est aussi médiane donc……. on peut donner une lettre? (*le point du milieu est nommé H)* 47 G: on compare les triangles en fait 48 C: on dit que c'est quoi? C'est ….H	(43) « **AH hauteur** », par interprétation du dessin (48) Dénomination du point H
49 C: <u>ADO isocèle</u> <u>HA est la hauteur</u> car, attends…AE est perpendiculaire à OD 50 G: regarde les données 51 C: et aussi AE est perpendiculaire à OD alors AH perpendiculaire OD. Marque-le là dessus! On met *(elle écrit)*... Si ...il faut dire que AH, H est un point de la droite AE et AE perpendiculaire à OD donc ça veut dire que AH perpendiculaire à DO … 55 C: AH hauteur du triangle ADO, et si AD égal DO... ah! t'as mis *(Gaëlle avait déjà écrit que ADO isocèle)* ADO isocèle car... 56 G: tu fais une flèche 57 C: oui, attends, je mes : car AO égal AD, et dans un triangle isocèle la hauteur est aussi médiane 58 G: médiatrice? Médiane, là c'est 59 G: donc se coupent dans son milieu	[49] **β : OAD est isocèle, AH hauteur** β → γ : Dans un triangle isocèle la hauteur est aussi médiane et médiatrice --- **γ : AH médiane** (51 ÷ 55) rédaction [57] **γ : AH médiane** γ → δ : Si AH est médiane, alors H est milieu de la base OD du triangle OAD -- [59] **δ : H milieu de OD**

[10] **L'intervention [46]** concerne la verbalisation de l'énoncé tiers qui sert pour passer de la prémisse « β : OAD est isocèle » à la conclusion « γ : AH médiane ». C'est pourquoi, la valeur de la proposition est «vrai ».

60 C: Ouais, mais nous on a que le milieu de DO, il faut dire aussi, ... il faut trouver le milieu de AE .... *(Gaëlle parle en même temps)* et là on a la même chose: dans un triangle isocèle la hauteur est aussi médiane	(60) projet définissant l'hypothèse manquante à vérifier et le processus de déduction nécessaire à la vérifier (accumulation avec pas de déduction). **Rédaction** de la réponse

QUATRIEME PHASE

Cette phase du processus de résolution se développe par substitution à partir de l'intervention [69] pour aboutir à la solution du problème en démontrant la deuxième partie de l'hypothèse manquante (OD coupe AE en son milieu). Cependant, la phase démarre à partir de l'intervention [60] dans laquelle Camille évoque l'hypothèse encore à vérifier « DO coupe AE en son milieu » (H milieu de AE). Or, les interventions suivantes, jusqu'à l'intervention [66], ont comme objectif celui de rechercher l'énoncé tiers qui permet de vérifier l'hypothèse manquante sur la base des données recueillies ou déduites dans les phases précédentes. Nous relevons ici un mode accumulation des informations recueillies à l'avance. Ainsi, de l'appréhension opératoire qui permet d'isoler le triangle AOE et de la constatation visuelle d'être isocèle, on passe à la recherche de l'énoncé tiers permettant de montrer que ce triangle est isocèle. La question à **l'intervention [65]** « comment on sait que AO est égal OE, c'est donné ou...? mais comment on sait que c'est égal? » relève d'une valeur « *Indéterminé »* associée à la proposition. Cela permet de relever une différence dans l'usage de l'appréhension perceptive du dessin dans le mode d'expansion discursive de type accumulation ou substitution : même si l'évidence perceptive a permit d'associer au triangle la propriété d'être isocèle, la nécessité de le démontrer est retenue essentielle dans la substitution. Dans **l'intervention [66]** on reconnaît l'énoncé tiers permettant de montrer que le triangle AOE est isocèle. Remarquons que cet énoncé n'est pas verbalisé de façon complète.

De l'intervention [69], comme dit plus haut, le mode d'expansion substitution démarre et, en même temps, les élèves rédigent la solution. Remarquons la présence du temps présent indicatif des verbes « dire » et « être » qui signale la valeur « vrai » des propositions énoncées, et du verbe « mettre » qui met en évidence la phase de rédaction. Remarquons en outre l'absence des connecteurs de la substitution comme « si…alors », exception faite pour la présence de « donc », qui sont remplacés par des marques d'implication (par exemple les flèches) car la rédaction de la solution est menée par une écriture symbolique.

Le schéma proposé ci-dessous montre l'enchaînement de pas déduction par le recyclage de la conclusion d'un pas comme prémisse du pas suivant :

[60] H milieu de OD

[69] Prémisse α : AO=OE[11]

énoncé tiers $\alpha \rightarrow \beta$: Si un triangle a deux côtés égaux, alors il est isocèle

Conclusion β : AOE est isocèle

[69], [72] Prémisse β : AOE est isocèle

énoncé tiers $\beta \rightarrow \gamma$: Dans un triangle isocèle la hauteur est aussi médiane et médiatrice

Conclusion γ : OH médiane

[72] Prémisse γ : OH médiane

énoncé tiers $\gamma \rightarrow \delta$: Dans un triangle quelconque, la médiane d'un côté est le segment qui, à partir du sommet opposé, coupe le côté en son milieu.

Conclusion δ : H point du milieu de AE

1.5.2 Bilan sur les usages des unités linguistiques

Sur la base de l'hypothèse avancée a priori concernant les usages différents de certaines unités linguistiques comme élément de distinction entre l'accumulation et la substitution, nous développerons dans ce qui suit une analyse spécifique qui vise à comparer les usages des unités linguistiques dans le développement du processus de résolution lors de l'accumulation ou de la substitution. L'évolution du mode d'expansion discursive par rapport aux premières phases du processus (passage du mode d'expansion d'accumulation au mode de substitution), est mis en évidence aussi par la **dénomination de gestalts** isolées par appréhension opératoire sur la figure : le point H, intersection des segments AE et OD (intervention [48]) ; AH hauteur du triangle OAD (intervention [49]) ; AH perpendiculaire à OD (intervention [51]) ; H point de la droite AE (intervention [51]) ; H milieu de OD (intervention [65]) ; OAE triangle isocèle (intervention [69]), OH hauteur du triangle OAE (intervention [71], [72]), H milieu de AE (intervention [72]).

Les termes spatio-graphiques sont ensuite remplacés par les termes géométriques. Par exemple, DO et AE sont reconnues comme diagonales du quadrilatère ADEO (intervention

[11] AO=OE car ils sont rayons du cercle, mais ce pas de déduction n'est pas explicité ni le théorème constituant l'énoncé tiers de ce pas est verbalisé

[79]) et cela veut dire que les élèves n'utilisent plus déterminants « celui ci », « celui-là » qu'en anaphore car les éléments de base du dessin sont maintenant nommés. Par exemple, dans l'intervention [46] : « comme **ça** c'est la hauteur dans un triangle isocèle est aussi médiane donc…» le mot utilisé en déictique *ça* remplace le nom AH de la hauteur, mais dans ce cas, comme il participe d'un pas de déduction et comme la nominalisation AH de la hauteur apparaît à l'intervention précédente, nous le retenons dans son rôle anaphorique qui permet de ne perdre pas le fil du raisonnement déductif.

Les modalités (falloir, devoir, pouvoir) utilisées dans cette phase du processus ont toutes une raison théorique car elles participent de la démonstration des hypothèses manquantes du théorème verbalisé en [12]. En outre, **ces modalités sont accompagnées par verbes tels : « démontrer, dire, prouver » qui renforcent leur nécessité théorique (**par exemple, dans les interventions [51] et [60])

Les connecteurs « donc, comme, si…alors, car » introduisent des pas de déduction et non des inférences issues de l'interprétation du dessin.

Le pronom apparaissant dans cette phase de substitution est, comme prévu, un pronom représentant un énonciateur universel ou anonyme, dans ce cas **« on »,** par exemple dans l'intervention [72]. Mais nous remarquons qu'ici les pronoms « je » et « tu » apparaissent aussi en indiquant un énonciateur particulier. Par conséquent, il semble nécessaire de faire une analyse plus fine à propos du rôle des pronoms personnels. Même si le mode d'expansion discursive est ici de type substitution, les pronoms « je » et « tu » n'indiquent pas évidemment des représentants anonymes de la communauté participant de la résolution du problème, et cela serait en contradiction avec l'hypothèse avancée a priori selon laquelle dans une phase de substitution, les pronoms sont utilisés au sens indéfini. Les pronoms indiquent ici les élèves particuliers du binôme Camille – Gaëlle. Ainsi, nous observons que l'action que le sujet, indiqué par « je » or « tu », fait dans cette phase, ne participe pas du processus de résolution mais du processus de rédaction de la solution : « j'écris ce qu'on (la communauté du binôme) a produit ». Sur la base de cette considération, il paraît vraisemblable conclure que **la rédaction semble être ressentie par les élèves comme une phase très personnelle** qui permet d'expliciter des résultats généraux, c'est-à-dire des résultats qui pourraient être produits par n'importe quel autre binôme participant de l'expérimentation.

Cette considération à propos de l'unité linguistique « pronom personnel » permet aussi de tirer des conclusions par rapport à leur fonctionnement. Contrairement à ce qu'on avait prévu a priori, la situation ne semble pas être si nette : si d'un côté il semble confirmé que les pronoms personnels ont différentes fonctions dans l'expansion d'accumulation ou de substitution, de l'autre côté il semble aussi que le même pronom, dans le même type d'expansion discursive, puisse recouvrir différents rôles et cela aboutit à la définition d'autres usages d'unités linguistiques par rapport à celles prévues a priori.

Enfin, en nous appuyant sur l'idée selon laquelle le modèle « démarche de résolution » permet de comprendre dans quelle mesure l'expansion discursive d'accumulation et celle de substitution conditionnent la rédaction finale, nous essayerons de vérifier lesquels, parmi les pas de déduction faits pendant l'accumulation et les pas de substitution, sont retenus dans la rédaction finale. L'analyse du protocole montre que les pas de déduction qui ne sont pas retenus dans la rédaction participent des diversions issues du seul processus de résolution de Gaëlle. En accord avec la considération que les processus de résolution de Camille et Gaëlle, se développent en parallèle au début et à partir de l'intervention [41] constituent un seul processus de résolution, nous reconnaissons les diversions dans les interventions qui précédent l'intervention [41] : l'intervention [16], où on a le projet de montrer que les côtés AD et OE sont parallèles, l'intervention [36], où une inférence tirée du dessin porte sur la symétrie des côtés AO et DE pour conclure leur égalité, l'intervention [38] qui prévoit de montrer le parallélisme entre les côtés AO et DO.
Par contre, les pas de déduction dans de la substitution, issus du processus à partir de la verbalisation du théorème en [12], sont tous retenus dans la rédaction finale. En effet, les conclusions de ces pas de déduction correspondent aux réponses du Schéma 1 (paragraphe 1.3 de ce chapitre) par lequel nous avons représenté l'enchaînement de questions et réponses sur la base du modèle « démarche de résolution ».

Une considération de caractère général sur l'évolution des modes d'expansion discursive peut être faite à ce moment. Il nous semble avoir dégagé une des conditions permettant l'évolution des modes d'expansion discursive car nous avons relevé que les fonctions du langage agissent lors du passage d'un mode discursive à l'autre. Le passage de la première phase d'accumulation à la deuxième phase d'accumulation guidée de la verbalisation du théorème, semble être soutenu par l'action de guide du langage dans l'intervention [39]. De même, le passage de cette phase d'accumulation à la substitution semble être soutenu par la fonction d'association du langage lors des interventions [45] et [46]. Enfin, les deux phases de substitution semblent être liées entre elles par l'action de guidage du langage agissant à l'intervention [60].
Il semble que les passages d'un mode d'expansion discursive à l'autre (de l'accumulation vers la substitution), soient soutenues par l'action de certaines fonctions du langage. C'est

pourquoi, il semble raisonnable de retenir comme résultat de recherche le fait qu'en général, **les fonctions du langage favorisent l'évolution des modes d'expansion discursive du processus de résolution.**

1.5.3 Rôle pivot de certaines unités linguistiques

Après de la caractérisation des modes d'expansion discursive constituant le protocole de Camille et Gaëlle au moyen du fonctionnement des unités linguistiques, notre analyse se déplace maintenant sur le rôle de certaines de ces unités. Notamment, nous considérons les unités qui assument un **rôle pivot,** en favorisant le déplacement d'un mode d'expansion discursive à l'autre, par exemple, d'une accumulation en tant que juxtaposition d'informations, à une accumulation où la mise en relation des informations se fait par des pas de déduction. En accord avec l'hypothèse avancée a priori selon laquelle le passage parmi les modes d'expansion discursive peut être induit aussi par une même unité linguistique (paragraphe 6.2 du Chapitre III), nous chercherons les unités qui sont présents à la fois dans deux modes d'expansion discursive. Le premier critère utilisé pour reconnaître le rôle pivot des unités linguistiques est l'occurrence des unités dans les différents modes d'expansion discursive dans leur succession. Le deuxième critère est évidemment lié au fonctionnement des unités à l'intérieur de chaque mode d'expansion discursive : si la même unité est présente dans deux modes d'expansion différentes et dans chacun elle fonctionne selon les caractéristiques propres à ce mode d'expansion discursive, alors on peut raisonnablement penser que l'occurrence de l'unité dans un des modes d'expansion puisse avoir favorisé l'occurrence de la même unité dans l'autre mode d'expansion discursive (voir l'exemple décrit au paragraphe 6 du Chapitre III). Mais c'est à partir de leur usage différent, que le passage d'un mode d'expansion à l'autre peut être supposé. En d'autres termes, différents usages de la même unité linguistique peuvent favoriser le déplacement d'un mode d'expansion discursive à l'autre.

La recherche prend la liste des unités linguistiques dans l'ordre où elle est fournie a priori dans le paragraphe 6.2 du Chapitre III.

On commence donc par **les connecteurs** tels : « si…alors, donc, comme…alors… » et les analogues. L'analyse du protocole ne montre pas d'occurrence de ces connecteurs dans deux modes d'expansion discursives différents. Apparemment, donc, les connecteurs ne recouvrent pas ici un rôle pivot capable de déclencher une évolution des modes d'expansion discursive (cf. paragraphe 6.2 du Chapitre III).

Venons maintenant aux **termes mathématiques**. Comme on l'a évoqué à plus reprises, il y a certains termes mathématiques qui apparaissent dans deux interventions successives mais qui désignent objets différents. Nous retenons en particulier le terme « parallélogramme » apparu dans l'intervention [9] en désignant l'objet du problème et dans l'intervention [10] en désignant l'objet théorique qui participe du théorème énoncé. Il est vraisemblable penser que l'occurrence du terme en [9] a favorisé l'évocation du même terme en [10] et que, l'usage différent du terme a favorisé le changement d'un mode d'accumulation simple au mode d'accumulation avec pas de déduction. De même, dans les interventions [11] et [12], le terme mathématique « losange » est d'abord utilisé en référence à l'objet du problème et, dans la deuxième intervention, en référence à l'objet théorique issu de la question du problème. Le même terme participe encore d'une accumulation simple d'abord et en suite d'une accumulation avec pas de déduction. C'est pourquoi nous considérons que ces unités linguistiques ont un rôle pivot par rapport l'évolution des modes d'expansion discursive.

Les mots utilisés en déictique sont utilisés ici pour indiquer des éléments du dessin, en remplaçant la dénomination de ces éléments, ou bien ils sont utilisés en anaphore pour renvoyer de façon synthétique à plusieurs données (31).

Les modalités. La modalité dont l'occurrence est remarquable dans ce protocole est la modalité «falloir ». Les occurrences de cette modalité appartiennent soit aux interventions de Gaëlle soit aux interventions de Camille mais, comme le processus dominant pendant la résolution est celui de Camille, centré sur l'énoncé du problème et renvoyant à la question du problème, le rôle pivot de la modalité concerne apparemment le déplacement du processus de Gaëlle d'une accumulation simple, où les relations entre les informations sont tirées de l'interprétation du dessin, à l'accumulation avec pas de déduction (cette question sera développée de façon détaillée au paragraphe 3 du Chapitre VI). Par exemple, si dans l'intervention (9) on remarque une simple information tirée de l'interprétation du dessin, dans l'intervention (16) on relève un projet mis en évidence par la modalité falloir : « **il faut** dire qu'elles sont parallèles… ». Les interventions de Gaëlle, donc, semblent se développer dans un contexte d'expansion discursive différent où l'on prévoit aussi des pas de déduction. La modalité « falloir » a été introduite par Camille à l'intervention précédente (12) accompagnée du verbe « dire », combinaison qui, selon notre liste donnée a priori, devrait introduire une accumulation ou une substitution où la mise en relation des informations passe par pas de déduction. En effet, cette intervention (16) ne relève pas vraiment d'une accumulation de ce type car l'inférence est encore tirée du dessin, mais elle souligne la nécessité d'un projet mis en évidence par l'usage du verbe « dire » qui accompagne la modalité « falloir ». Encore plus évident est le lien entre les interventions (23), (36) et (38). Même si elles ne sont pas proches l'une de l'autre, on relève une sorte de fil commun imposé par l'usage du verbe « démontrer » qui réclame, surtout à l'intervention (38), un contexte d'accumulation avec pas de déduction. Il ressort de ce qu'on vient de dire que, l'usage de la modalité « falloir » accompagnée des verbes « démontrer » et « dire », permet l'avancement de l'expansion discursive dans le processus de résolution

Conclusion

L'analyse du protocole de Camille et Gaëlle faite à l'aide du Mécanisme énoncé nous a permis de repérer **où s'exercent les fonctions du langage sur le processus de résolution** : c'est dans le passage d'une étape à l'autre du mécanisme que les fonctions de guide et d'association peuvent s'exercer. La fonction de planification apparaît à la suite des fonctions de guide.

Le modèle nous a permis aussi de mettre en évidence **comment les fonctions du langage s'exercent** au cours du processus de résolution : la fonction de guide s'exerce à la suite de la verbalisation de l'énoncé d'un théorème, tandis que la fonction d'association semble s'exercer grâce à des mots déclencheurs qui permettent d'évoquer le théorème utile à la résolution. La fonction de planification permet de planifier la démonstration des prémisses de l'énoncé du théorème verbalisé.

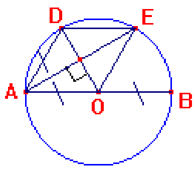
Le Mécanisme permet ainsi de reconnaître le **rôle joué par le langage dans les allers et retours entre appréhension opératoire du dessin et référent théorique** comme il a été montré de façon détaillée sur le terme « parallélogramme ».

ANNEXE [1]

[1.1] Analyse du processus de résolution issu du protocole de Camille et Gaëlle au moyen du modèle « Démarche de résolution »

Légende :

- Q : question
- SQ : sous-question
- R : réponse

Problème (B1)  [AB]diamètre du cercle A, D et E sont des points du cercle (AE) est perpendiculaire à (OD) AO = AD Montrer que AOED c'est un losange	**Enchaînement de questions et réponses**
1 C: Camille 2 G: Gaëlle 3 C: t'as vu? 4 G: c'est quoi ce truc? 5 C: il faut écrire…nom et prénom 6 G: "AB diamètre du cercle " 7 C: "A, D, E sont des points du cercle " (*elle les indique par un geste des doits sur la figure)* 8 C: "AE est perpendiculaire à OD" "AO est…. " Ou là là	
9 G: ça est égal ça (*en indiquant AO et AD)* ça c'est un parallélogramme AO égal OE égal AD donc ça fait un parallélogramme	(9) Appréhension perceptive du dessin par laquelle on tire l'information « le quadrilatère est un parallélogramme » ; Dans le domaine d'interprétation du dessin l'élève construit l'inférence qui justifie l'information tirée perceptivement. Le parallélogramme est un objet du problème
10 C: mais un parallélogramme c'est pas les côtés cotés de la même longueur, c'est les côtés opposés qui sont….	(10) Le terme « parallélogramme » s'adresse ici à l'objet théorique car il est contextualisée dans référent théorique qui n'est pas verbalisé de façon complète
11 G: ouais, ouais, tu as raison …….c'est un **losange**	(11) Encore une information tirée par appréhension perceptive sur le dessin. « Losange » est un objet du problème.

12 C: ouais, ouais, **pour un losange il faut dire que les diagonales se coupent dans leur milieu et ils sont perpendiculaires** 13 C: le losange… les diagonales se coupent dans leur milieu 14 G: et perpendiculaires	(12) L'énoncé cible est un théorème verbalisé de façon complète et correcte donc il permet de définir deux questions : **Q1 : les diagonales sont perpendiculaires** **Q2 : les diagonales se coupent en leurs milieux**
15 C: Attend, perpendiculaires c'est bon là, en fait, il faut dire que….	(15) **Réponse R1** à la question Q1. Cette réponse est tirée des données de l'énoncé. Pourtant la construction de la réponse est immédiate.
16 G: En fait ce côté c'est le même que celui là *(AD et OE)*, hein, il faut dire qu'elles sont parallèles aussi …t'as jamais utilisé le triangle rectangle dans le cercle? Je ne sais plus (*elle trace le segment BE)* 17 C: ouais, mais….. 18 G: non …..mais………	(16)Cette intervention est composée de deux moments : le premier moment concerne une appréhension discursive, tandis que le deuxième moment concerne une appréhension opératoire du dessin. L'égalité des côtés est tirée par appréhension discursive sur le codage du dessin. Le terme « il faut » introduit la question : **Q3 : les côtés AD et OE sont parallèles.** Cette question ne correspond pas à une prémisse d'un théorème verbalisé et donc elle ne participe pas d'un projet de résolution. Elle constituera une Diversion, comme on verra dans la suite. L'appréhension opératoire du dessin se réalise par ajoute d'un trait : le segment BE.
19 C: mais oui, mais….. enfin …ce n'est pas la peine de dire qu'elles sont parallèles à partir du moment qu'on sait que c'est un quadrilatère où les diagonales se coupent dans leur milieu et perpendiculairement, dans ce cas là c'est évident qu'elles sont parallèles, non? 20 G: ouais, et … si on fait comme ça…..	(19) Q1 + Q2 $\Rightarrow$ Q3 : à partir de Q1 et Q2 on infère la réponse à la question Q3. C'est de cette façon que Camille montre comment la question Q3 n'est pas condition nécessaire et suffisante dans le théorème verbalisé à l' intervention [12]. En d'autres termes la question Q3 reste hors de son projet de résolution. La diversion est ainsi ramenée au processus principale.
21 C: ouais, mais dans ce cas là se coupent dans leur milieu	(21) L'appréhension perceptive du dessin semble garantir l'évidence du fait que les diagonales se coupent en leurs milieux. Camille semble avoir assigné à la proposition la valeur « vraie »
22 G: et comment tu peux savoir qu'elles se coupent dans leur milieu?	(22) La question Q2 est explicitée ici en tant que question directe (avec le point d'interrogation)
23 C: ben justement, c'est ce qu'on veut démontrer, non?	(23) C'est dans cette intervention qu'on assigne à la proposition de la question Q2 la valeur « Indéterminée ».

Silence ….chuchotement…..	
24 G: *chuchote* A, D,O, attends, …ça… AO …DA.	(24) Appréhension opératoire sur le dessin. L'objectif est d'isoler des sous-configurations du dessin (gestalt de dimension inférieur) pour les combiner en une autre sous-configuration.
25 C: c'est trop chiant	
26 G: regarde ce qu'on peut dire: que AEB c'est rectangle ! 27 …	(26) L'appréhension opératoire du dessin permet d'isoler la sous-configuration du triangle AEB. L'information « AEB est un triangle rectangle » est obtenue par un pas de déduction lié au théorème qui n'a été pas verbalisé en [16]
28 C: oui, oui, mais ça sera bon?	
30 G: on sait jamais ça peut toujours servir	
31 C: mais ouais, ça c'est, tout ça c'est des données et tout… *elle indique la liste de données*	(31) Camille revient sur la liste des données
32 G: Attends, "A, D, E points du cercle, AE perpendiculaire et AO égal AD	(32) Gaëlle revient sur la liste des données
33 C: ah, ouais, ce que tu veux dire c'est que…..	
34 G: je ne sais pas si ça serve à quelque chose, mais on sait jamais	
35 C: je ne sais pas…….	
36 G: peut être on peut démontrer, …tiens regarde, ça c'est symétrique par rapport à ça (*AO et DE)* donc en fait c'est le même	(36) L'information « AO est symétrique par rapport à DE » est tirée du domaine d'interprétation du dessin. L'information AO égal DE est obtenue par une inférence tirée du dessin
37 C: et alors?	
38 G: et après il faut qu'on puisse démontrer qu'il est parallèle à celui là	(38) Le terme « il faut » introduit la question implicite suivante : **Q4 : AO et DE sont de la même longueur** Les interventions [36] et [38] montrent que les informations obtenues et les informations qu'il faut encore justifier participent d'un théorème qui n'est pas explicité. Pour cela nous considérerons ces informations dans d'une diversion n'étant pas constituants d'un projet de résolution.
39 C: ouais, mais ce qu'il nous faut c'est de dire que c'est le milieu là, ce truc, non?	(39) On revient sur la question Q2. La question est reformulée car les sujets ne sont plus les diagonales mais le milieu. En d'autres termes, le point du milieu dévient le sujet référent substituant la relation entre les diagonales du quadrilatère, comme il est soulignée dans l'intervention (41)
40 G: ouais	
41 C: c'est le milieu de ça et de ça (*de DO et de AE)*. Bon, super!	(41) Dans cette intervention nous pouvons distinguer deux sous-questions de la question Q2 :

	SQ2/1 : Le point d'intersection des diagonales est le milieu de OD (AE coupe OD en son milieu) **SQ2/2 : Le point d'intersection des diagonales est le milieu de AE (OD coupe AE en son milieu)** Les sous-questions, évidemment, restent implicites. L'existence des sous-questions est susceptible de signaler que le processus de construction de R2 n'est pas immédiat.
42 C: Attends, AO égal AD *(elle revient aux données codées sur le dessin)* ….. et si on prouve que le triangle DAO est isocèle,… parce que ça fait quelque chose, tu sais, par rapport à ça *(DO)*	(42) L'appréhension opératoire du dessin permet d'isoler la sous-configuration du triangle OAD en introduisant une nouvelle question **Q5 : OAD est un triangle isocèle.**(question implicite) L'information qu'on tire de la réponse à la question Q5 est mise en relation avec la diagonale DO. Cela nous amène à dire qu'on est évidemment dans un processus de construction de réponse : on recherche R2/1 et R2/2. Il ressort de cette intervention que la réponse R5 est tirée de façon immédiate à partir des données de l'énoncé.
43 G: ouais, parce que c'est la hauteur 44 C: ouais, c'est la hauteur 45 G: ouais, c'est aussi la médiane …….AH OUI	(43)-(45) Il semble que le mot « isocèle » soit un mot « déclencheur » au sens donné au terme dans la définition des mécanismes (voir paragraphe 3.2 du Chapitre III)
46 C: ça veut dire, comme ça c'est la hauteur dans un triangle isocèle est aussi médiane donc……. on peut donner une lettre? (*le point du milieu est nommé H)* 47 G: on compare le triangles en fait 48 C: on dit que c'est quoi? C'est ….H 49 C: ADO isocèle HA est la hauteur car, attends …AE est perpendiculaire à OD 50 G: regarde les données 51 C: et aussi AE est perpendiculaire à OD alors AH perpendiculaire OD . Marque-le là dessus! On met *(elle écrit sur la feuille)*... Si ...il faut dire que AH, H est un point de la droite AE et AE perpendiculaire à OD donc ça veut dire que AH perpendiculaire DO … 55 C: AH hauteur du triangle ADO, et si AD égal DO... ah! t'as mit ...ADO isocèle car...	(46) Verbalisation complète du théorème : « dans un triangle isocèle, la hauteur est aussi médiane et médiatrice ». Ce théorème est l'énoncé tiers qui permet de répondre à SQ2/1 (« AE coupe OD en son milieu » ou encore « le point d'intersection des diagonales est le milieu de OD »)

56 G: tu fais une flèche 57 C: oui, attend, je met : car AO égal AD, et dans un triangle isocèle la hauteur est aussi médiane (*le disent les deux élèves ensemble)* 58 G: médiatrice? Médiane, là c'est 59 G: donc se coupent dans son milieu	
60 C: Ouais, mais nous on a que le milieu de DO, il faut dire aussi, ... il faut trouver le milieu de AE.... *(Gaëlle parle au même temps)* et là on a la même chose: dans un triangle isocèle la hauteur est aussi médiane 61 C: j'ai mis : une médiane passe au milieu d'un côté... au milieu, non?	(59) Réponse à SQ2/1 (60) Recherche de la réponse à SQ2/2 aussi. Pendant la phase de construction de la réponse R2/2 les élèves explicitent le projet pour obtenir la réponse . Par l'appréhension opératoire du dessin, les élèves isolent une nouvelle sous-configuration, le triangle AOE et, en utilisant le même théorème de l'intervention [46] sur ce triangle, on montrera que le point H est le milieu de AE.
62 G: la médiane passe par le sommet.... au fin... 63 C: la médiane passe par le milieu du côté qu'elle coupe ?! 64 G: donc tu met, DH fin, H est le milieu de DO	L'application du théorème amène, quand même, à la définition d'une nouvelle sous-question **Q6 : le triangle AOE est isocèle.**
65 C: Donc H est le milieu de DO, de Même .. à ouais, mais pour l'autre triangle il faut dire que.. comment on sait que AO est égal OE, c'est donné ou.? mais comment on sait que c'est égal ?	(65) Explicitation de la question Q6 : les segments AO et OE doivent être égaux.
66 G: attends, ... parce que c'est un rayon du cercle 67 C: ah, oui! 68 G: donc voilà,	(66) La construction de la réponse à Q6 passe par un théorème qui n'est pas explicité : « tous les rayons d'un cercle ont la même longueur », mais elle est de type « immédiat »
69 C: alors de Même, dans l'autre triangle AOE, AO est égal à EO car ces sont des rayons du cercle, et le triangle est donc isocèle 70 G: et... 71 C: et OH est la hauteur 72 G: issue de O	(69) Explicitation de la réponse R6
72 C: donc la médiane ... H milieu de AE donc là on met tu, attends alors je fais une flèche comme ça. On met: H milieu de.. 74 G: AE et DO 75 C: Attends je fais comme ça et après je met	(72) Explicitation de la réponse R2/2

un truc et je met donc... 76 G: ouais, ok, 77 C: H milieu de DO.. 78 G: Ouais, tu met toutes les données. Tu met aussi perpendiculaire 79 C: AE perpendiculaire à DO Attends je met aussi que : DO et AE sont les diagonales du quadrilatère ADEO Je met un segment... comme ça ...je ne sais pas! AE et DO... 80 G: un segment je pense 81 C: (*elle écrit)* et un quadrilatère où les ... dont les diagonales *(Gaëlle chuchote « se coupent »)* se coupent dans leur milieu 82 G: perpendiculairement (*Camille écrit)* 83 G: est un losange 84 C: Donc ADEO est un losange, Voilà!	(81) Les élèves reviennent sur le théorème correspondant à l'énoncé cible, en donnant les réponses aux questions Q1 et Q2 qui ont étés définies par le théorème même.

[1.2] Analyse du processus de résolution issu du protocole de Olivier et Djamel au moyen du modèle « Démarche de résolution

Problème (A 1)

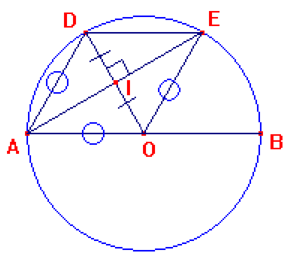
Soit (C) un cercle de centre O est de diamètre [AB], D un point de ce cercle tel que AD = AO. La perpendiculaire à (OD) passant par A recoupe le cercle (C) au point E.

Démontrer que OADE est un losange.

Justifiez soigneusement vos réponses

<u>Analyse du processus au moyen du modèle « Démarche de résolution et ses diversions »</u>

L'analyse du protocole qui suit, relatif au problème A1, est centrée sur le modèle de la « Démarche de résolution ». Nous essayerons donc d'identifier l'enchaînement des unités de base constituées du triplet [question, construction de la réponse, réponse].



Le dessin ci-contre est la reproduction de la construction faite par les élèves Olivier et Djamel

Dialogue[12]	**Enchaînement de questions et réponses**
1 D: *il commence à lire l'énoncé* Soit C un cercle de centre O et de diamètre AB 2 O: on peut tracer le… la figure 3 B: bien sur 4 D: D un point de ce cercle tel que AD est égal à AO, une perpendiculaire à OD passant par A recoupe le cercle C dans le point E. Démontrer que OADE est un losange *Ils commencent à construire la figure en utilisant le compas* 5 D: Olivier trace un cercle de centre O et de diamètre AB et il le trace soigneusement, voilà. 6 O: donc c'est O et le diamètre, *il trace sur le dessin et il nomme les sommets des segments.* AB le diamètre , t'as AD égal AO *il code l'égalité avec des petits rondes sur les segments* Bien, c'est normal ça… 7 D: est un point de ce cercle, tu as AD égal AO, bien oui, c'est normal, parce que s'il est sur le cercle 8 D : non, il faut que tu dis que DE est égal à AO 9 O: non, que AD …. 10 D: mais si, regard : DO est égal à AO, donc AD et puis il faut faire ça *Il décrit la construction du dessin* En suit on prend le compas et on trace le cercle coupant le cercle en D, pour que AD est égal à AO. Voilà 11 O : la perpendiculaire à OD qui passe par A, …tout ça c'est normal, parce que c'est un triangle isocèle 12 D: Oui, bien! 13 O: *il sont en train de dessiner* on va faire OD, passant par A … mais il faudrait un truc parce que elle est perpendiculaire, t'as pas une éclaire , *il demande une équerre mais personne l'a*	Construction du dessin De l'intervention 1 à l'intervention 22

[12] La phase consacrée à la construction du dessin est reportées ci-dessous en caractère 10

On le fait perpendiculaire… mais le problème c'est…. 14 D: tout façon on prend ---- qui ressemble 15 O: mais non, de tout façon on prend le milieu du segment et ça passe parce que c'est un triangle isocèle 16 D: *il décrit la situation pour blaguer un peu* sans équerre nous pouvons tracer une perpendiculaire car c'est un triangle isocèle AOD est un triangle isocèle, donc la médiatrice, la médiane et la hauteur sont confondues 17 O: bravo professeur Djamel! …. Passant par A recoupe au point E *ils relient la dernière partie d'énoncé* 18 O: je trace le point 19 D: le point d'intersection, …. 20 O: O, A, E.. non, O, A, D, E 21 D: mais non, c'est là E! 22 O: je me suis trompé sur le point et vais effacer ce point là pour le mettre sur le cercle, voilà. Je trace le losange OADE ****************	*************************
23 D: mais non, **il faut montrer que OADE est un losange!** Donc, c'est parti ! Alors…. Bien, bien …c'est fini! **Parce que** les diagonales sont perpendiculaires, donc, si les diagonales sont perpendiculaire c'est un losange…..à non, attend, il faut que ….. Ah, oui, **puisque** les diagonales sont perpendiculaires et passent par le milieu de OD	(23) Q1 : « **il faut montrer que OADE est un losange**! » est la question de l'énoncé *Parce que* introduit l'énoncé tiers, c'est-à-dire le théorème qui devrait permettre de répondre à Q1. Cependant le théorème n'est pas verbalisé de façon complète[13]. Le théorème auquel Djamel se réfère est : « Un parallélogramme ayant les diagonales perpendiculaires est un losange ». Dans ce cas, la construction de la réponse passerait par la définition des sous-questions suivantes[14] : SQ1/1 : les diagonales sont perpendiculaires SQ1/2 : les diagonales se coupent en leurs milieu. Cette dernière se compose de deux sous-questions : SQ1/2.1 : AE coupe OD en son milieu SQ1/2.2 : OD coupe AE en son milieu Les deux sous-questions correspondent à dire que le quadrilatère est un parallélogramme. Nous appellerons cette sous-question SQ1/3 pour la distinguer dans la suite de la SQ1/2.1 et de la

[13] Il faut encore évoquer le théorème « un quadrilatère ayants les diagonales qui se coupent en leur milieu est un parallélogramme ».

[14] Comme on l'a décrit dans le paragraphe consacré à la description des mécanismes, la recherche des propriétés géométriques ou des relations géométriques demandées dans les prémisses explicitées, sera interprétée en termes des questions et sous-questions.

	SQ1/2.2. Djamel, prend en charge seulement les prémisses correspondantes aux sous-questions SQ1/1 et SQ1/2.1. Les autres prémisses, par lesquelles on pourrait définir les autres SQ, sont manquantes. Il semble que la réponse à la sous-question SQ1/1 (les diagonales sont perpendiculaires) est introduite de façon immédiate avant même de la verbalisation du théorème dont, comme on a déjà dit, on n'a pas une verbalisation complète. La réponse est tirée des données de l'énoncé. *Puisque* semble introduire la réponse à la sous-question SQ1/2, mais cette réponse est issue de l'appréhension perceptive du dessin. C'est pourquoi, nous considérons dans l'intervention à la fois les réponses à SQ1/1 et SQ1/2 et la verbalisation incomplète du théorème. Le critère par lequel les élèves tirent certaines réponses, semble être la seule évidence perceptive mais comme le dessin est construit par les élèves, ils tirent des informations de la construction même. Par exemple, le fait d'avoir construit la propriété de perpendicularité entre les diagonales par la construction de la hauteur du triangle isocèle OAD, induira les élèves à attribuer au point d'intersection des diagonales la propriété d'être le milieu du segment DO
24 O: A oui, **parce que** ils se coupent dans leurs milieux	(24) *Parce que* introduit la réponse à SQ1/2 en s'appuyant sur l'évidence perceptive. On remarque que, à cet étape on a deux points de milieu: le point du milieu de OD et celui de AE. Ils doivent être coïncidents.
25 D: **donc c'est un losange**…. Nous avons trouvé la réponse	(25) C'est la réponse R1 à Q1. On remarque dans cette unité de base (question1, construction de la réponse1, réponse1) l'absence de la phase de construction de la réponse. En effet, la construction de la réponse à partir de l'intervention [26], mais l'exigence d'une preuve est pour les élèves une nécessité de contrat (induite de l'énoncé), plutôt que une nécessité théorique.
26 O: mais attend, mais non, tu sais ce que tu fais? ce que tu fait , regard, ça c'est égal à ça *(AD est égal OA)* et ça c'est égal à ça*(AD est égal OD)*	(26) Cette intervention introduit le processus de construction de la réponse **CR1** à Q1 par appréhension discursive du dessin. En effet, on revient sur les données de l'énoncé (AD=AO) et on ajoute une autre information tirée d'une inférence implicite sur le dessin, AD=DO. Cette déduction en effet, n'est pas justifiée.
27 D: non, on est bête, mais regard: OD est égal à OE est égal à OA **parce que** ces sont de rayons du cercle, trois rayons …donc…comme ça *(DA)* est égal à ça *(AO)*, que AD est égal AO, donc DE est égal à OE	(27) l'information OD=OA=OE est justifiée par le fait que les segments sont tous rayons du cercle. Le théorème utilisé de façon correcte, même s'il n'a pas été explicité, est un **théorème en acte**: « tous les rayons du cercle ont la même longueur ». Dans cette intervention, la nouvelle information (DE est égal à OE) est obtenue par inférence tirée

est égal à OE	de l'interprétation du dessin (jeu de symétries). (28) question explicite Q2 : est – il DE égal à OE ?
28 O: comment tu sais que c'est DE ? 29 D: observant la perpendiculaire…. Mais no, regard, … Comme dans le résumé, dans l'énoncé on dit que AD est égal à AO et que OE est un rayon, donc il est égal à AO parce que OA c'est un rayon. Donc OE est égal à AO qui est égal à AD, et…. ……	(29) La construction de la réponse R2 se base sur une appréhension perceptive du dessin, comme le souligne le verbe « observer ». Dans cette intervention est présente la re-verbalisation des informations recueillies et de leurs justifications : AD=AO, donnée de l'énoncé ; OE rayon, issue par déduction ; OA rayon, donnée de l'énoncé ; OE=OA issue par déduction ; OE=OA=AD issues par de déduction
32 O: je sais! **si** il y a deux cotés opposés qui sont égaux, **donc** c'est un …	(32) A' partir des informations recueillies on évoque le théorème « Un quadrilatère ayant deux côtés opposés égaux et parallèles, est un parallélogramme » qui permettra de construire la réponse pour SQ1/3 . Le théorème, verbalisé de façon complète comme nous l'avons fait ci-dessus, pourrait définir les sous-questions suivantes : SQ1/3.1 : deux côtés opposés égaux SQ1/3.2 : deux côtés opposés parallèles. Mais le théorème n'est pas formulé de façon complète car Olivier prenne en compte seulement la prémisse correspondante à la SQ1/3.1 « **si** il y a deux côtés opposés qui sont égaux, **donc** c'est un …parallélogramme ».
33 D: losange 34 O: c'est un parallélogramme, **et donc comme** il y a un angle droit **comme** les diagonales se coupent en un angle droit alors c'est un losange. 35 D: nous avons trouvé la réponse	(34) La structure « et donc comme….comme » renvoie au fait que les élèves sont en train de recueillir toutes les vérification des prémisses nécessaires pour appliquer le théorème. En effet, ici l'élève recueil les réponses à la SQ1/3, « le quadrilatère est un parallélogramme », et SQ1/1, « les diagonales sont perpendiculaires » en concluant que le quadrilatère est un losange, donc en donnant la R1. Comme les théorème n'est pas verbalisé de façon correcte (intervention 23), on peut remarquer que les réponses ne correspondent pas à la vérification des hypothèses nécessaires et suffisantes pour appliquer le théorème.
36 O: NON, il faut prouver qu'ils sont parallèles. Parce que, soit tu prouve que ces deux là sont parallèle, donc c'est bon, soit tu prouve…soit tu prouve que ça *(AO)* c'est égal à ça *(DE)*, que ça *(DA)* c'est égal à ça *(EO)* mais tu ne peut pas dire que si ça *(DA)* c'est égal à ça *(EO)* c'est un parallélogramme	(36) Verbalisation de SQ1/3.2 : deux coté opposés parallèles. Dans la suite de cette intervention il est adressé au le quadrilatère est un parallélogramme (SQ1/3). Nous remarquons que ce théorème est verbalisé de façon spécifique pour le quadrilatère du problème, le quadrilatère OADE, mais il ne s'adresse pas à n'importe quel quadrilatère. La verbalisation passe par le cas spécifique du dessin objet du problème, pour cela les côtés opposés qui doivent être parallèles sont nommés respectivement AO et

	DE, DA et OE en permettant de définir ainsi les sous-questions : SQ1/3a : AO = DE SQ1/3b : DA = OE
37 D: mais si on prouve que DO coupe en le milieu de AE et comme ça coupe au milieu et on a un angle droit alors c'est un losange. Il faut dire que DO coupe en le milieu de AE	(37) Dans cette intervention on retrouve la verbalisation de la SQ1/2.2 (DO coupe au milieu AE) et la verbalisation de la SQ1/1 (diagonales qui se coupent perpendiculairement)
38 O: non, ça serve pas ! 39 D: tout semple, c'est la symétrie… 40 O: mais non, c'est par ce que ça c'est un triangle isocèle	(39)/(40) La construction de la réponse à SQ1/2.2 passe par l'appréhension opératoire du dessin qui permet d'isoler la sous configuration du triangle isocèle OAD sur lequel il sera appliquée la propriété de la symétrie. La propriété « être isocèle » est issue de la construction du dessin et d'une inférence implicite à partir des informations recueillies
41 D: ben oui, on dit que c'est la symétrie 42 O: **puis que** ça c'est perpend…, puis que ça coupe… ça coupe mâchant trous là…au milieu, et que c'est la hauteur, donc c'est la médiane, la hauteur et c'est la médiatrice, donc celui là c'est un losange … attend, non c'est un triangle isocèle, et donc ça *(AO)* est égal à ça *(AD)* et donc comme ça *(AO)* est égal à ça *(OE)* et il est égal à ça *(DE)*.. attend maintenant il faut…. attend Madame!, il faut écrire ou on dit juste ….	(42) La réponse à SQ1/2.2 est tirée de la sous configuration triangle isocèle au moyen de l'énoncé tiers « dans un triangle isocèle, la hauteur de la base est confondue avec sa médiane et sa médiatrice ». Ce théorème n'est pas verbalisé de façon complète et correcte mais il est utilisé de façon correcte. C'est pour quoi, nous considérons ce théorème un théorème en acte au sens de Vergnaud. Cette intervention devrait recueillir les réponses aux questions et sous-questions, mais comme le théorème constituant Q1 n'a pas été verbalisé de façon complète et correcte, les sous-questions aussi n'ont pas étés explicitées. C'est pourquoi ces réponses ne suivent pas l'ordre de leur construction, et elles ne sont pas bien explicitées en laissant aux « gestes indicateurs » la dénomination des objets géométriques constituants le dessin et ses sous-configurations. On remarque en outre la récurrence de mots utilisés en déictique qui accompagnent et renforcent les gestes indicateurs.
43 B: non, il faut écrire	On verra dans la suite comment l'écriture du processus oblige les élèves à suivre un ordre dans l'exposition des pas de déduction
44 O: alors il faut **d'abord** que ADO est un triangle isocèle	(44) L'adverbe temporel indique la volonté de suivre un ordre qui, pour le moment, est l'ordre temporel de construction des pas de déduction à partir du dernière et en remontant à l'arrière. Enoncé tiers : OAD est un triangle isocèle
45 D: "puisque AE est perpendiculaire à DO , donc, tu met, AOD est un triangle isocèle"	(45) Réponse à SQ1/1 : AE et OD sont perpendiculaires

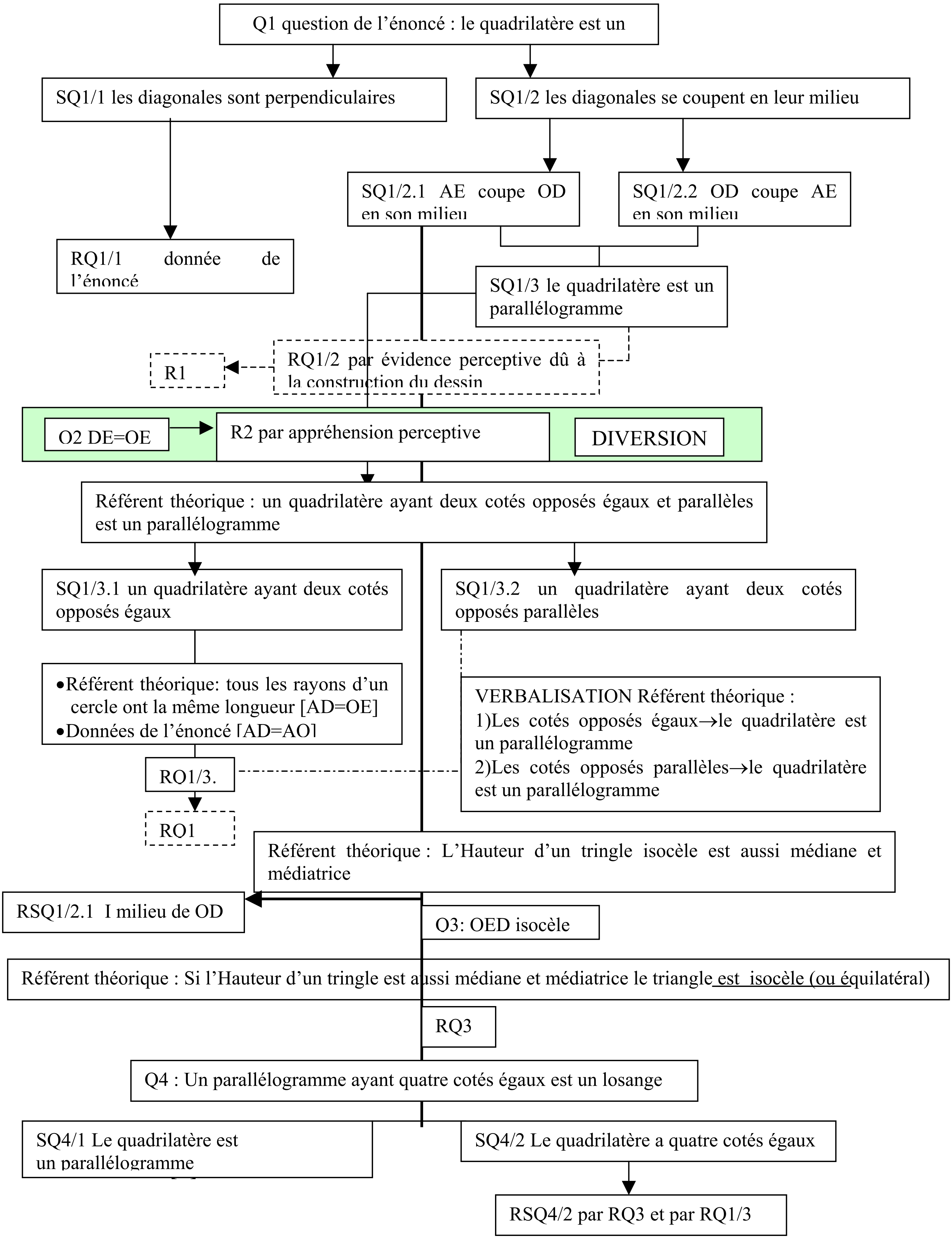
…… 48 O: en suite, donc à partir de là 49 D: donc la médiane, la hauteur et la médiatrice sont confondues 50 O: attend, après il faut dire que OED est un triangle isocèle 51 D: comment on avait fait déjà? J'ai oublié 52 O: oui, on avait dit que comme, que ça c'est perpendiculaire et que ça c'était le milieu, c'était la médiane, la médiatrice et la hauteur et donc ça c'était isocèle 53 D: ah, oui 54 O: parce que un triangle isocèle… donc en suite (*il relie ce qu'il a écrit*) AE est perpendiculaire à DO 55 D: mais on dit c'est la symétrie 56 O: "AE est perpendiculaire à DO" il faudrait un point *ils demandent s' ils peuvent rajouter un point* 57 D: Nous rajoutons un point 58 O: Un point comment, on l'appel comment, bien, un point I comme intersection	(49) énoncé tiers qui, même dans la phase d'écriture du processus, n'est pas verbalisé de façon complète et correcte (50) La question Q3: OED triangle isocèle n'a pas été posée pendant la phase orale du processus de résolution. Cette information constituera un élément fondamental pour répondre à la question SQ1/3 (un quadrilatère ayant les cotés opposés égaux est un parallélogramme) (52) L'intervention porte sur la verbalisation de la réciproque d'un théorème qui a été déjà utilisé de façon correcte sans être pourtant verbalisé : étant l'hauteur, médiane et médiatrice aussi, le triangle ODE est isocèle.
59 D: comme milieu, on prend le milieu 60 O: nous rajoutons un point I qui est l'intersection des droites DO et AE Donc "AOD est isocèle donc I est le milieu de OD car la hauteur est confondue avec 61 D: la médiane et la médiatrice 62 O: avec la médiane et la médiatrice", comme ça c'est la médiane, la médiatrice et c'est la hauteur, il faut dire ça autrement, non?	(60), (61) On a ici la réponse à la sous question SQ1/2.1
63 D: comme dans le triangle DEO la droite AE coupe DO par son milieu mais qui est perpendiculaire, donc DEO il est isocèle, c'est la réciproque 64 O: on met "AE	(63) réponse à la question Q3 en utilisant le théorème verbalisé en (52)

65 D: si on envers le triangle DEO déterminant la réciproque 66 O: "AE est la médiane, la hauteur et la médiatrice, donc DEO est un triangle isocèle" voilà 67 D: Une fois qu'on a ça, comme … on va pas mettre comme ça, tu sais, on va faire…tu met AO égal AD 68 O: " AO = AD, AO = OE et OE = ED" et là on met une calade pour dire comme AO est égal à mâchant truc tu as donc " AO = AD = OE = ED" on comprend comme ça! 69 D: donc AOED ... 74 O: donc le quadrilatère OADE est un losange car il a quatre côtés de même longueur 75 D: et ses diagonales perpendiculaires 76 O: mais on s'en fout quoi, parce que un losange ça fait quatre… 77 D: ouais, mais…. ……………. 80 O: d'accord "mais aussi ses diagonales sont perpendiculaires" 81 D: tu met aussi, "mais aussi ses diagonales…" 82 O: attend je ne sais plus, 83 D: mais si, mais, c'est bon là, un parallélogramme ses cotés opposés sont de même longueur est un rectangle, pareil 84 O: un losange c'est quatre cotés et les diagonales perpendiculaires, et un carré c'est toutes les propriétés de ce quadrilatère 85 D: tu met que les cotés de même longueur et ses diagonales perpendiculaire, ça y est, on a fini.	(66)➔(74) A' partir des informations tirées de la (44) et de la (50), c'est-à-dire DAO isocèle et DEO isocèle, on donne la réponse finale R1 à la question du problème. (74) La réponse R1 passe par le théorème : « un parallélogramme ayant quatre côtés égaux est un losange » évoqué de la sous-configuration du quadrilatère OADE. Le théorème, que nous appellerons Q4, définit deux sous-questions : SQ4/1 : le quadrilatère est un parallélogramme SQ4/2 : le quadrilatère a quatre côtés égaux Or, le théorème n'est pas verbalisé de façon complète car Olivier verbalise la seule hypothèses correspondant à la SQ4/2 (75) Djamel ajoute aux hypothèses nécessaires pour la R1, réponse finale, l'hypothèse correspondant à SQ1/1 qui a été utilisée dans le processus de construction de la réponse .

86 O: je ne sais pas, en fait 87 D: mais si, c'est bon si je te le dit	

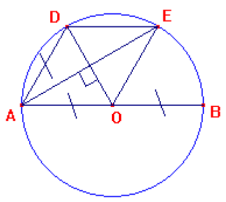
L'analyse du protocole au moyen du modèle « Démarche de résolution » montre que le processus de résolution n'est pas réductible à un enchaînement complet de unités de base. Cela veut dire qu'à chaque question n'est pas associée une réponse et/ou une construction de la réponse.
Or, en général, comme dans notre modèle, la question correspond à l'énoncé cible à prouver, qu'il soit la question du problème ou une des hypothèse d'un théorème à utiliser, et comme la construction de la réponse correspond à la recherche d'un énoncé tiers pour aboutir à la réponse, en récupérant un ou plusieurs théorèmes utiles à l'aboutissement de la réponse, l'enchaînement manquant d'unités de base relève d'un échec dans l'un des ces éléments. Le fait qu'il manque la construction des unités de base et leur enchaînement, veut dire que peut faire défaut la présence de l'énoncé cible ou la recherche de l'énoncé tiers, donc la construction de la réponse.
Dans le cas du protocole analysé, on remarche que la verbalisation complète de certains énoncés cible à prouver fait défaut, par exemple, la verbalisation de certains théorèmes utiles à l'avancement du processus. En accord avec l'hypothèse avancée lors de la description des mécanismes, l'utilisation correcte d'un théorème pilote passe aussi par la verbalisation complète et correcte de son énoncé.
La verbalisation de l'énoncé du théorème permet de donner au propositions constituant son énoncé un statut : le statut d'hypothèse ou de conclusion. Le statut d'hypothèse permet de définir des autres questions, dépendantes de celle d'origine, qui nous appelons sous-questions (SQ). Le statut de conclusion permet de définir la réponse de la question, l'énoncé cible.
Comme on vient de le dire, la raison de l'échec dans l'enchaînement cohérent et complet des unités de base est cherchée dans le processus d'origine des questions et de construction des réponses, c'est-à-dire par l'analyse du protocole au moyen du modèle des Mécanismes. Les mécanismes ont étés définis en effet comme outils permettant de décrire les processus d'origine des questions et de construction des réponses.

Ci-joint le schéma figurant l'enchaînement de questions et réponses.


Q1 question de l'énoncé : le quadrilatère est un
SQ1/1 les diagonales sont perpendiculaires
SQ1/2 les diagonales se coupent en leur milieu
SQ1/2.1 AE coupe OD en son milieu
SQ1/2.2 OD coupe AE en son milieu
RQ1/1 donnée de l'énoncé
SQ1/3 le quadrilatère est un parallélogramme
R1
RQ1/2 par évidence perceptive dû à la construction du dessin
Q2 DE=OE
R2 par appréhension perceptive
DIVERSION
Référent théorique : un quadrilatère ayant deux cotés opposés égaux et parallèles est un parallélogramme
SQ1/3.1 un quadrilatère ayant deux cotés opposés égaux
SQ1/3.2 un quadrilatère ayant deux cotés opposés parallèles
•Référent théorique: tous les rayons d'un cercle ont la même longueur [AD=OE]
•Données de l'énoncé [AD=AO]
VERBALISATION Référent théorique :
1)Les cotés opposés égaux→le quadrilatère est un parallélogramme
2)Les cotés opposés parallèles→le quadrilatère est un parallélogramme
RQ1/3.
RQ1
Référent théorique : L'Hauteur d'un tringle isocèle est aussi médiane et médiatrice
RSQ1/2.1 I milieu de OD
Q3: OED isocèle
Référent théorique : Si l'Hauteur d'un tringle est aussi médiane et médiatrice le triangle est isocèle (ou équilatéral)
RQ3
Q4 : Un parallélogramme ayant quatre cotés égaux est un losange
SQ4/1 Le quadrilatère est un parallélogramme
SQ4/2 Le quadrilatère a quatre cotés égaux
RSQ4/2 par RQ3 et par RQ1/3

ANNEXE [2]

[2.1] Processus de résolution déboutant par l'appréhension opératoire du dessin. Analyse conduite sur la base du modèle : Mécanisme centré sur le dessin (protocole de Elena et Alessandra)



- AB diametro del cerchio
- O centro del cerchio
- A, D ed E sono punti del cerchio
- AE é perpendicolare ad od
- AO = AD

Dimostrare che OADE è un rombo

Dialogue	**Analyse du processus**
1. A: allora, leggiamo?	
2. E: dunque, AB diametro del cerchio, O centro del cerchio, A, D ed E sono punti del cerchio AE è perpendicolare ad OD, AO = AD Dimostrare che OADE è un rombo Allora…… AO è un raggio della circonferenza, OD è raggio della circonferenza, OE è raggio della circonferenza, AD = OA per ipotesi, quindi il rombo è …. un quadrilatero con quattro lati congruenti	2. Accumulation simple par juxtaposition d'informations tirées de l'appréhension opératoire du dessin. Donc, le mécanisme qui nous permettra de modéliser l'analyse est centré sur le dessin. La présence de la dénomination des unités de base, telles AO, OD, OE… et l'explicitation de la classe typique à laquelle elles appartiennent, « être rayon du cercle », relève de l'opération de catégorisation Évocation non complète de la définition[15] du losange. Le terme « losange » renvoie ici à la question du problème tandis que le terme « quadrilatère » renvoie à un objet théorique car participe d'une définition. La configuration du quadrilatère ayant quatre côté égaux constituera **une configuration étiquette** renvoyant au concept de losange mais c'est le terme « losange » qui recouvre ici le rôle de mot étiquette
3. A: cos'è?	
4. E: cosa?	
5. A: cos'è un quadrilatero con quattro lati congruenti?	
6. E: bhe, sì, potrebbe essere anche un quadrato	

[15] Définition : « un parallélogramme ayant quatre côtés égaux est un losange »

7. A: ma non capisco <u>cosa vuoi fare</u>? Un quadrilatero con quattro lati…	7. Question directe concernant la nécessité de l'explicitation d'un projet
8. E: <u>AO, OE e OD sono raggi della circonferenza, e sono congruenti</u> e… sì, OD non mi serve a nulla! Basta, ok! 9. A: perché non ti serve?	8. Recueille d'informations par appréhension opératoire du dessin. Une des informations est déclarée inutile car elle ne rentre pas dans la liste des propriétés demandées à l'intervention (2), c'est-à-dire « quatre côtés égaux du quadrilatère ». On remarque la **fonction de guide du langage** dû à l'évocation, même si partielle, de la définition de losange. En effet, dans l'intervention 10 nous remarquerons que la recherche d'informations vise à trouver des relations d'égalité des cotés du quadrilatère.
10. E: perché sono le diagonali Poi AD è congruente a AO e quindi…. Però so che AO…. <u>Questo triangolo</u> *<u>(AHD</u>, H intersezione di DO con AE)* 11. A: come la chiamiamo questa intersezione?	10. Le même segment OD est relié à différents objets géométriques : le rayon, dans l'intervention 8 et la diagonale, dans l'intervention 10. Cela relève d'une opération de description (au sens de Duval) consistant en le croisement de plusieurs opération de catégorisation. Les opérations de catégorisation, ainsi que l'opération de description, sont mise en acte par l'appréhension opératoire et discursive du dessin.
12. E: H, così <u>AHO è un triangolo rettangolo.</u> Allora… è un triangolo rettangolo. <u>In un rombo le diagonali sono perpendicolari</u> 13. A: sì, mi sembra di sì. 14. E: solo nel rombo? 15. A: mmm, anche nel quadrato!	12. L'appréhension opératoire du dessin permet d'isoler le triangle rectangle AHO. Comme il est désignée la classe typique à laquelle le triangle appartient, étant un triangle rectangle, nous remarquons ici l'opération de catégorisation Remarquons que dans cette phase du processus caractérisée par le mode d'expansion discursive de type accumulation, sont absentes les mots utilisé en déictique dont, d'habitude, l'accumulation est riche. Il se peut que, l'adjectif « rectangle », prononcé verbalement, puisse renvoyer à la perpendicularité de segments, c'est pour quoi il peut être considéré un **mot étiquette**. De même, la configuration du triangles rectangles, isolées dans le dessin, peut constituer une **configuration étiquette**. Or, il nous semble que l'action conjointe du mot étiquette « rectangle » et de la configuration étiquette « triangle rectangle », permet d'évoquer la propriété du losange « les diagonales sont perpendiculaires ». C'est pourquoi nous considérons que le langage remplisse ici une **fonction d'association**. 15. Question directe concernant l'explicitation d'un projet

Hai preso questo triangolo rettangolo AOH, perché hai preso quel triangolo li? Cosa vuoi fare?	
16. E: bhe, perché è rettangolo!	16. Apparemment l'information « être un triangle rectangle » ne participe pas d'un projet pour la vérification des propriétés demandées dans l'intervention 2, mais plutôt il participe d'une simple juxtaposition d'informations. Or, comme le programme scolaire de géométrie plane en Italie concerne les critères d'isométrie des triangles, il est vraisemblable penser que la propriété « triangle rectangle » soit retenue une information importante à garder.
Però, AO e AD cioè AOD è un triangolo isoscele	« AOD est un triangle isocèle » est une inférence implicite tirée d'une appréhension discursive du dessin sur la base des données du problème (AO=AD).
Anzi, per dire meglio, è equilatero.	« AOD est un triangle équilatérale » est une inférence implicite tirée des propriétés recueillies par appréhension opératoire du dessin dans les interventions précédentes.
Quindi il triangolo AHO è un triangolo particolare, triangolo 30, 60, 90	Le mot « **équilatérale** » fonctionne comme un **mot étiquette** car il renvoie immédiatement aux propriétés : « tous les angle du triangle AOD sont de 60° » et « le triangle est composé des deux triangles rectangles ayants les angles de 90°, 60° et 30° » qu'en Italie on appelle « triangles rectangles particuliers » car il soufis connaître la mesure d'un angle pour en déduire la mesure de l'autre, étant le troisième évidemment de 90°. On relève ici la **fonction d'association** du langage
17. A: questo è 30° (D*ÂH)*, questo è 60° *(l'angolo HDA)* e questo è 90° *(Ĥ)* ovviamente, anche l'angolo in O è 60°	
18. E: HO è quindi metà di AO	18. Information tirée d'une inférence implicite (AO=OD, HO=1/2OD alors HO=1/2AO). Nous remarquons comment le recueille d'informations en ce moment vise à la recherche d'un énoncé tiers qui permet aux élèves de vérifier la condition « quatre cotés égaux du quadrilatère ». Or, il est évident que cette recherche s'appuie sur l'appréhension opératoire du dessin et elle se présente en tant que juxtapositions d'informations indépendantes
19 A: ma AO è uguale a DO, quindi H è il punto medio di DO, quindi HO è uguale a HD	19. recueille d'informations concernant le segment DO par pas de déduction. On remarque donc que cette phase d'accumulation concerne aussi des pas de déduction.
20. E: sì, …..però, OE è congruente a AO quindi HO è anche la metà di OE	20. recueille d'informations concernant le quadrilatère. On remarque que en ce moment, les appréhension opératoire et discursive du dessin issues des interventions 19 et 20, concernent

quindi HO è anche la metà di OE	différents sous-configurations du quadrilatère : dans l'intervention 19 il est vraisemblable penser que la sous configuration isolée est le triangle OAD, tandis que dans l'intervention 20 la sous-configuration concerne les triangles AHO et EHO.
21. A: non ho capito 22. E: allora, AO è congruente OE perché 23. A: ah, sì sono due raggi 24. E: quindi HO è anche metà di OE 25. A: perché sono tutti raggi e a metà… *E. codifica DO con lo stesso tratto degli altri raggi* 26. A: li abbiamo marcati tutti	
27. E: allora, non so ancora, ma anche DEO dovrebbe essere equilatero	27. l'appréhension opératoire du dessin qui permet d'isoler la sous-configuration du triangle DEO est associée à l'appréhension perceptive qui permet d'en tirer la propriété « être équilatéral ». La phrase « je ne sais pas encore… », l'utilisation du conditionnel « DEO devrait… » et l'utilisation de la modalité « devoir », relèvent que l'information « triangle équilatéral » ne participe pas d'un projet. En outre, ils relèvent aussi que l'information « DEO équilatérale » n'est déduite pas.
28. A: perché vuoi dimostrare che è equilatero?	28. Question directe concernant l'explicitation d'un projet
29. E: non so, ma sembra che lo sia…	29. La propriété « être équilatéral » ne participe pas d'un projet, ni elle rentre dans une des propriétés à vérifier pour la définition du losange (intervention 2), c'est pourquoi elle constituera simplement une information à ajouter à la liste. L'expansion discursive reste donc en ce moment de type accumulation. En outre, il nous semble que, étant la valeur de la proposition en [27] vraisemblable (la valeur de la proposition est épistémique liée évidemment à son contenu et déduite d'une constatation visuelle), le propos des élèves vise vérifier la vérité de cette proposition.
30. A: vabbè, ma come facciamo a dimostrarlo?	30. Même si l'information ne participe pas d'un projet, elle est tirée par une pas de déduction remarquable aussi par l'usage du verbe « démontrer ». Il est pour autant évident qu'on est ici dans une accumulation déductive.
31. E: questo è meta di questo *(HO est la moitié di OE)* e DH è congruente a OH quindi DH è anche metà di OE. Questo è in comune…	31. Les **mots** utilisé en **déictique** employés dans cette phase d'accumulation déductive recouvrent le rôle de condensation, car ils permettent de verbaliser de façon « condensée » une relation entre les segments HO et OE déjà dénommées précédemment.

32. A: in che senso in comune? 33. E: l'ho diviso in DEH e HEO 34. A: quindi abbiamo EH in comune	33/34. L'appréhension opératoire du dessin est nécessaire pour la recherche de certaines relations entre les cotés des triangles qui permettent d'appliquer les critères d'isométrie des triangles.
35. E: Poi DH è congruente a HO 36. A: <u>ci manca una cosa direi,</u> perché abbiamo due lati, ci mancherebbe forse un angolo. Però non un angolo qualsiasi	36. La phrase « il nous manque quelque chose… » et l'utilisation du conditionnel « Il manquerait .. » relèvent d'un projet en cours L'élève fait référence au critère d'isométrie des triangles pour lequel deux triangles rectangle sont isométriques s'ils ont respectivement un coté isométrique et un angle adjacent congruent. Nous remarquons que le critère n'est pas verbalisé car il est un théorème en acte. En effet, dans la pratique scolaire en Italie, l'usage de ces critères est très fréquent. C'est pourquoi, l'application correcte des critères ne passe pas nécessairement par leurs verbalisation.
37. E: l'angolo DHE non è detto che sia retto…<u>sarà meglio che riguardi il testo</u>… AB diametro del cerchio, O centro del cerchio, A, D e E sono punti del cerchio AE è perpendicolare a … Allora è perpendicolare!! Quindi quello li è retto (*angle DHE*), quindi i triangoli sono congruenti Però…..<u>l'angolo AOH è congruente all'angolo ADH</u> 38. A: sì, perché è di 60°	37. On revient sur l'énoncé du problème afin de récupérer le donnée manquante. Dès que l'élève relève que les segments AE et OD sont perpendiculaires, un enchaînement de pas de déduction implicites se réalise : DHE est un angle droit donc, étant les triangles rectangles, et ayant les triangles le côté HE en commun et les côtés DH et HO égaux, les triangles sont isométriques. Les élèves appliquent un des critères d'isométrie des triangles sans l'avoir verbalisé à l'avance. La relation d'égalité des angles AOH et ADH est tirée du critère des triangles rectangles isométriques mais, évidemment, elle a été déjà décrite par la propriété d'être « équilatérale » du triangle OAD comme le souligne l'intervention suivante (38)
39. E: quindi anche questo è congruente a questo (*l'angle ODE est égal à l'angle DOE*) 40. A: perché? 41. E: perché abbiamo dimostrato che i due triangoli erano congruenti 42. A: ah, sì è vero.	39. Les élèves tirent aussi la propriété d'égalité des angles EDH et EOH au moyen du même critère appliqué aux triangles EDH et EOH, comme est exprimé dans l'intervention 41.
43. E: e tutti questi triangoli sono congruenti fra loro per proprietà transitiva perché AD è congruente a OA per ipotesi, poi AO è congruente a OE perché sono raggi e ED è congruente ai raggi perché… perché le abbiamo	43. L'appréhension opératoire identifie quatre triangles rectangles composants le quadrilatère. L'information : « les triangles rectangles composantes le quadrilatère sont isométriques » est obtenue par déduction. L'expansion discursive est encore de type accumulation déductive.

congruente ai raggi perché…perché lo abbiamo dimostrato. E poi sono tutti triangoli rettangoli 44. A: e poi perché DH e HO sono uguali e tutti i triangoli hanno questa base 45. E: e quindi sono tutti congruenti. E quindi…. Bo? 46. A: allora anche tutti questi angoletti sono congruenti, diciamo gli angoli in A e gli angoli in E (*DEH, OEH; DAH, OAH*)	45. Il est évident que les élèves ne savent pas comment utiliser les informations recueillies car elles ne participent pas d'un projet. Nous avons l'impression que la recherche d'informations n'a que le but de trouver « l'idée » pour l'évocation d'un théorème utile pour aboutir à la résolution. La recherche, donc, n'est pas guidée. Or, nous ne pouvons pas oublier que dans l'intervention [2] on a relevé la verbalisation d'une définition de losange. Mais, comme cette verbalisation n'était pas complète, nous pouvons raisonnablement penser que ce fait ait conditionné l'action de la fonction de guide du langage (comme on verra de façon détaillée au Chapitre VI)
47. E: poi,…. e <u>sono congruenti anche AH e HE</u>, e anche <u>DH e HO sono congruenti</u>. E quindi… non c'era un teorema su…che diceva che **le diagonali di un parallelogramma si incontrano nel punto medio delle due diagonali.**	47. Dans cette intervention les élèves ajoutent à la liste d'informations une nouvelle information : « AH=HE ». En suite, ils retiennent de la liste les seules informations « AH=HE » et « DH=HO » qui leur permettent d'évoquer le théorème « les diagonales d'un parallélogramme se coupent en leur milieu » Mais, pourquoi et comment les informations permettent-elles aux élèves l'évocation du théorème ? La configuration des diagonales qui se coupent en leur milieu et l'appréhension opératoire du quadrilatère dans sa totalité, est une configuration prototypique qui peut être associée au parallélogramme. C'est pourquoi nous retenons qu'elle puisse jouer ici le rôle de **configuration étiquette.** La prononciation des relations d'égalité des segments DH et HO et des segments AH et AE, et la configuration ci-dessus décrite en tant qu'étiquette, semblent avoir une **fonction d'association.** En effet, l'action conjointe de la prononciation des mots d'égalité et la configuration étiquette permettant l'évocation du théorème reliant les diagonales et leur relation, avec le quadrilatère.
48. A: Sarebbe: **se le diagonali si incontrano nel loro punto medio, allora il quadrilatero è un parallelogramma.**	48. Evocation correcte et complète du théorème
49. E: <u>non so se funziona</u> 50. A: vabbè guardo sul libro	49-51 Ces interventions expriment la phase de construction d'un projet de résolution guidée par le théorème ci-dessus cité

51. E: e supponendo che funzioni. **C'è un parallelogramma che ha i lati congruenti…quindi, non è un rombo?**	51. La phrase : « En supposant que ça sera bon,… » relève d'une modèle d'action des élèves de type hypothético-déductif (nous en renvoyons au Chapitre VI la définition). Le théorème qu'on vient de verbaliser constituera l'énoncé-tiers pour aboutir à la conclusion car il permet de vérifier une hypothèse manquante : « le quadrilatère est un parallélogramme ». Cette hypothèse participe de l'énoncé du théorème qui a été verbalisé de façon non complète en (2), mais qu'ici est verbalisé de façon correcte et complète à l'aide du manuel (52)
52. A: è un rombo! Vabbè vediamo sul libro…parallelogramma…. "**in un parallelogramma le due diagonali si tagliano scambievolmente per metà", eccolo qua!** Allora se succede questo è un parallelogramma, allora è un parallelogramma il nostro. <u>E poi</u> ?	52. Verbalisation correcte et complète du théorème recouvrant le rôle de énoncé tiers
53. E: avevamo detto che se ha anche i lati congruenti allora è un rombo	53. Nous remarquons que la verbalisation du théorème en (52) fonctionne de guide car on relève une comparaison entre les hypothèses du théorème verbalisé en [2] et les informations recueillies pendant le processus qui maintenant recouvrent le rôle de prémisses.
54. A: andiamo a vedere….rombo…. **"un parallelogramma con quattro lati uguali dicesi rombo"** eccolo!	54. La verbalisation du théorème « un parallélogramme ayant quatre cotés égaux est un losange » (verbalisation complète du théorème prononcé dans l'intervention 2) relève ici d'une fonction de contrôle car les élèves remontent à l'arrière pour vérifier que toutes les hypothèses sont prouvées : l'hypothèse « le quadrilatère est un parallélogramme » a été prouvée dans les interventions 47-52, tandis que l'hypothèse « les quatre côtés égaux » a été prouvée au moyen des critères des triangles rectangles superposables. Nous remarquons que dans les interventions 47, 51 et 53 le mode d'expansion discursive est de type substitution : $\alpha \rightarrow \beta$ (théorème en 47 : « les diagonales d'un parallélogramme se coupent en leur milieu ») α (hypothèse du théorème en 47 : « le diagonales se soupent en leur milieu ») — β (hypothèse du théorème en 51 : « le quadrilatère est un parallélogramme ») $\beta \rightarrow \gamma$ (théorème en 51 : « un parallélogramme ayant les côtés égaux est un losange ») —

55. E: un secondo… "un parallelogramma è un rombo se le diagonali sono perpendicolari" e lo sono, 56. A: allora lo possiamo dire sia dicendo che è un parallelogramma con i quattro lati uguali, sia dicendo che è un parallelogramma con le diagonali perpendicolari.	γ conclusion : le quadrilatère est un losange 55. Le manuel scolaire fournit aux élèves un autre théorème utile pour aboutir à la solution : « un parallélogramme ayant les diagonales perpendiculaires est un losange » Au moyen de la fonction de contrôle du langage et de la verbalisation des théorèmes utiles, les élèves proposent un nouvel projet de résolution : la verbalisation du théorème fournit aux élèves une guide pour établir quelles hypothèses sont à vérifier, et la fonction de contrôle leur permet de vérifier que toutes les hypothèses requises dans l'énoncé de ce nouvel théorème ont été déjà prouvées

Tableau : processus de résolution décrit par le mécanisme centré sur le dessin[16]

DONNÉES issues de l'énoncé du problème	SOUS-CONFIGURATIONS Issues de l'appréhension opératoire	PRÉMISSES issues de l'appréhension opératoire ou de pas de déduction	THÉORÈMES ÉVOQUÉS En noir les théorème verbalisés (référent théoriques)
AO = AD	Appréhension opératoire du cercle Appréhension opératoire du quadrilatère OADE	AO rayon, OD rayon, OE rayon → **Fonction d'association du langage PF**	**1) Def : Un losange est un quadrilatère ayant quatre côtés égaux.** (Verbalisation non complète) **Fonction de guide TD** ←
		AO=OE	
AE ⊥ OD	Appréhension opératoire du triangle AHD	Le triangle AHD est rectangle **Fonction d'association du langage PF** →	**2) les diagonales d'un losange sont perpendiculaires** **TD** de 1)
	Appréhension opératoire du triangle OAD	AO=AD, le triangle OAD est isocèle Les angles d'un triangle isocèle sont tous de 60°	
	Appréhension opératoire du triangle rectangle AHO	Le triangle rectangle AHO est particulière donc il a les angles de 90°, 60° et 30°	
		HO=1/2 AO HO = HD HO=1/2OE	
	Appréhension opératoire du triangle équilatérale DEO	DH=HO	

[16] PF indique **le processus de formulation du théorème**. TD indique la phase de **retour du traitement sur le dessin** guidée par la structure du théorème.

AE ⊥ OD	Appréhension opératoire des triangles DEH et HEO	* EH en commun * L'angle DHE est de 90° **Fonction d'association du langage**	**3) II critère des tringles superposables :** **si deux triangles ont respectivement superposables un coté et les angles adjacent, alors les triangles sont superposables.**
		* Les triangles DEH et HEO sont superposables	
AO=AD	Les diagonales qui se coupent en leur milieu L'appréhension opératoire du quadrilatère dans sa totalité **Configuration étiquette**	* L'angle ODE=à l'angle DOE * AO=AD donnée * AO=OE parce que ils sont des rayons * OE=ED par le critère des triangles superposables * les angles DEH, OEH, DAH, OAH sont égaux • **DH=HO** • **AH=HE** **Fonction d'association du langage**	**4) Un quadrilatère ayant les diagonaux qui se coupent en leur milieu est un parallélogramme**
		Le quadrilatère est un parallélogramme (par le théorème 4) Les cotés du quadrilatère sont égaux (par le critère des triangles superposables)	**5)Un parallélogramme ayant les quatre cotés égaux est un losange** (verbalisation complète de la définition 1) **Fonction de contrôle du langage**

Chapitre VI

Résultats de l'analyse des protocoles

0. Introduction

L'objectif de notre recherche concerne, comme nous l'avons souligné à plusieurs reprises, l'analyse du rôle du langage lors de la résolution d'un problème de démonstration en géométrie plane. C'est pourquoi, nous avons postulé l'existence de certaines fonctions du langage qui jouent un rôle moteur dans la résolution des élèves, en supposant que le langage naturel puisse constituer une sorte de pont entre l'appréhension opératoire du dessin et les référents théoriques engagés dans la résolution du problème. Suivant cette hypothèse, une analyse détaillée d'un protocole a été poursuivie, en constituant l'objet d'étude du Chapitre V. De prime abord, l'existence de ces fonctions est apparue vraisemblable. De plus, le langage en tant qu'outil de résolution permet de construire des liens entre référent et signifiant. Même la seconde hypothèse que nous avions postulée, concernant le rôle du langage en tant qu'outil pour le chercheur, a été validée. En effet, l'analyse conduite au Chapitre V a confirmé le rôle du langage en tant que révélateur des ses fonctions. Les résultats de l'analyse des protocoles, qui feront l'objet d'étude de ce chapitre, nous semblent cruciaux pour renforcer l'idée que le langage puisse contribuer à l'établissement des relations entre signifié[1] et signifiant.
Donc, les résultats obtenus relèvent soit du langage en tant qu'outil de résolution (**fonctions du langage**, **modèles d'actions** … comme on verra dans les paragraphes suivants) soit du langage en tant que révélateur de ces outils (par exemple, l'**usage de certaines unités linguistiques**).

L'expérimentation a été conduite en Italie et en France. L'activité a engagé 14 binômes dont 9 italiens et 5 français[2] et elle s'est déroulée dans une salle du bâtiment scolaire des élèves qui

[1] Nous remarquons comment, a posteriori, l'analyse se déplace du lien entre référent et signifiant au lien entre signifié et signifiant. Cela parce que, a posteriori, le signifiant (représentation du concept) est mise en relation par le sujet qui résout le problème avec le signifié, qui reprisent la construction du référent, faite par le sujet, dans la situation.
[2] En Annexe à ce chapitre un tableau permet d'avoir une vue d'ensemble sur les problèmes que les binômes

n'est pas la salle de classe.

1. Le langage en tant qu'outil de résolution

L'objectif de ce paragraphe est de présenter les résultats obtenus relatifs au langage en tant qu'outil de résolution. Nous distinguerons deux types de résultats à ce propos : les résultats qui répondent à la problématique de cette thèse concernant la recherche des **fonctions du langage**, et les résultats (à propos du langage) qui ne répondent pas à des questions posées a priori dans la problématique, mais qui nous semblent aider à décrire les processus de résolution des élèves face d'un problème de géométrie plane. Ces derniers résultats concernent des **modèles d'action** menés par les élèves, c'est-à-dire des conduites que nous considérons comme particulièrement intéressantes car elles apparaissent dans plusieurs processus.

1.1 Fonctions du langage

Comme dit plus haut (paragraphe 4.2 du Chapitre II), notre analyse se développe sur deux niveaux différents : les fonctions du langage relatives au sujet, et les fonctions discursives relatives au référent mathématique. Pour ce qui concerne ces dernières, notre recherche s'appuie sur la théorie de Duval en retenant la fonction apophantique (constitution d'un énoncé complet sur l'objet qu'on désigne) remplie par l'opération de prédication (qui consiste à lier l'expression d'une propriété, d'une relation ou d'une action à une expression désignant des objets). Pour ce qui concerne les fonctions du langage, par contre, notre recherche s'appuie notamment sur la théorie de Jakobson, de Vygotsky et sur celle de Baktine.
Les résultats obtenus de notre recherche révèlent l'existence de fonctions du langage vues par rapport au sujet : ces fonctions semblent décrire et caractériser de façon fine l'idée de fonction du langage comme aide et maîtrise de la pensée développée par Vygotsky et Jakobson. En effet, même si les fonctions du langage décrites dans cette recherche se révèlent par rapport à la situation particulière de résolution d'un problème de démonstration en géométrie plane, elles semblent concerner l'aspect individuel caractérisant les fonctions du langage décrit par Vygotsky dans son ouvrage « Pensée et Langage » (1938). Ainsi, ce paragraphe sera consacré aux définitions et aux descriptions des fonctions du langage issues de l'expérimentation développée au sein de notre recherche.
Travailler sur les fonctions du langage signifie chercher en quoi les fonctions sont susceptibles d'aider à la résolution et cela ne signifie pas que les fonctions du langage

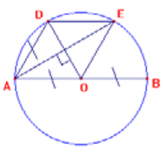
engagés dans l'expérimentation ont résolu.

impliquent la réussite du processus de résolution du problème.

1.1.1 Fonction de guide

Le but de ce paragraphe est de définir la *fonction de guide* du langage et les conditions de son fonctionnement. C'est pourquoi nous présenterons tout d'abord deux extraits des protocoles qui permettent d'illustrer comment s'exerce cette fonction du langage. Ensuite, nous en proposerons une définition, ce qui permettra aussi d'introduire les conditions nécessaires pour son fonctionnement.

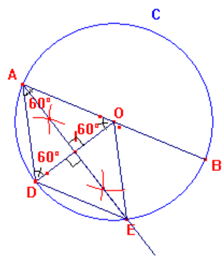
➢ Extrait du protocole Camille / Gaëlle[3] (Problème B1)



8. C: "AE est perpendiculaire à OD" "AO est….
9. G: ça est égal ça (*en indiquant AO et AD*) ça c'est un parallélogramme AO égal OE égal AD donc ça fait un parallélogramme [appréhension perceptive du dessin]
10 C: mais un parallélogramme c'est pas les cotés de la même longueur, c'est les cotés opposés qui sont….
11 G: ouais, ouais, tu as raison …c'est un losange
12 C: ouais, mais ouais, **pour un losange il faut dire que les diagonales se coupent dans leur milieu et ils sont perpendiculaires** [verbalisation de l'énoncé du théorème]
13 C: le losange… les diagonales se coupent dans leur milieu
14 G: et perpendiculaires
15 C: Attends, perpendiculaires c'est bon là, [vérification immédiate d'une des prémisses du théorème. On revient sur les données du problème]en fait il faut dire que….
16 G: En fait ce côté c'est le même que celui là *(AD et OE)*, hein, il faut dire qu'elles sont parallèles aussi …t'as jamais utilisé le triangle rectangle dans les cercles ? Je ne sais plus (*elle trace le segment BE)*
17 C: ouais, mais…..
18 G: non …mais………
19 C: **mais oui, mais… enfin …ce n'est pas la peine de dire qu'elles sont parallèles à partir du moment qu'on sait que c'est un quadrilatère où les diagonales se coupent dans leur milieu et perpendiculairement, dans ce cas là c'est évident qu'elles sont parallèles, non?**
20 G: ouais, et … si on fait comme ça…
21 C: ouais, mais dans ce cas là se coupent dans leur milieu
22 G: et comment tu peux savoir qu'y se coupent dans leur milieu?
23 C: ben justement, c'est ce qu'on veut démontrer, non? [prémisses qu'il faut encore prouver]

[3] Pour des raisons de brièveté, nous adopterons dans ce qui suit la marque C/G pour indiquer le protocole du binôme Camille et Gaëlle.

➢ Extrait du protocole Kévin / Jérémie[4] (Problème A1)



17. J : déjà il y a les diagonales qui se coupent dans leur milieu et qui sont perpendiculaires [appréhension opératoire du dessin]
18. K : t'es sûr qui se coupent dans leur milieu?
19. J : non, ça faudrait prouver ça, mais perpendiculaires ça c'est sûr !
20. K : donc t'as fait bissectrices ou médiatrices?
21. J : médiatrices, bissectrices ça coupe l'angle en deux, enfin moi…
22. K : si tu as fait médiatrice, dans ce cas là c'est sûr qui se coupent dans leur milieu [interprétation du dessin à la suite de la construction du dessin]
23. J : ouais, l'angle coupe au milieu quand même, mais bon, …

Alors, démontrer que c'est un losange…;

42. K : [---] c'est un parallélogramme [appréhension opératoire du dessin qui permet d'isoler la sous configuration du quadrilatère], je croyais que c'est un parallélogramme
43. J : les côtés opposés sont parallèles, et ça c'est un rayon *(OE)*

On sait que c'est un parallélogramme, il faut prouver que c'est un losange justement, c'est un parallélogramme spécial. Bon alors, pour prouver que ces côtés sont parallèles … Ben AD égal AO, AO c'est le rayon et EO c'est un rayon du cercle donc forcement AD il est parallèle

43. K: pourquoi forcement ?
44. J : ben, non égal égal
45. K : **si les diagonales sont perpendiculaires et elles se coupent dans leur milieu c'est un losange**
46. J :En tout cas, on sait que AD est égal à OE parce que on sait …
47. K : mais tu n'as pas besoin de prouver que c'est un parallélogramme, tu dis que c'est **un quadrilatère dont les diagonales se coupent dans leur milieu et elles sont perpendiculaires, et c'est un losange** [verbalisation de l'énoncé du théorème]
48. J : mail il faut prouver
49. K : oui, mais t'as pas besoin de dire que c'est un parallélogramme d'abord
50. J: ha oui, mais ben, ouais… Mais dans un losange de toute manière c'est parallèle
51. K : oui oui
52. J : mais il faut prouver par rapport aux diagonales, dans ce cas là
53. K : donc, attend les diagonales c'est AE et DO…

La verbalisation de l'énoncé du théorème[5] en [45] et [47] du protocole K/J et en [12] et [19] du protocole C/G rend les élèves conscientes que certaines propriétés vues sur le dessin et considérées comme à démontrer se déduisent du théorème énoncé. Nous remarquons que les élèves éliminent de la liste d'informations celles qui relèvent du statut opératoire de conclusion du théorème verbalisé ou qui sont une conséquence du théorème verbalisé (intervention [47] de K/J et intervention [19] de C/G).

[4] Pour une question de brièveté, nous adopterons dans ce qui suit la marque K/J pour indiquer le protocole du binôme Kévin et Jérémie.

[5] Nous retenons la notion de théorème fournie par M. A. Mariotti : «the existence of a reference theory as a system of shared principles and deduction rules is needed if we are to speak of proof in a mathematical sense. Principles and deduction rules are intimately interrelated so that what caracterises a mathematical theorem is the system of statement, proof and theory » (Mariotti, 1997, p 182-183).

Nous remarquons que la verbalisation du théorème impose un statut opératoire aux propositions, non seulement les propositions qui participent à l'énoncé du théorème (évidemment elles assument le statut opératoire de prémisse ou de conclusion), mais aussi celles énoncées à l'avance par lesquelles on exprime les propriétés géométriques des sous-configurations du dessin. Ces propositions, soulignés dans les extraits (par exemple, dans l'extrait du protocole K/J : " si tu as fait médiatrice, dans ce cas là c'est sûr qu'ils se coupent dans leur milieu ", "c'est un parallélogramme", "les côtés opposés sont parallèles", "AD égal AO", "AO c'est le rayon", "EO c'est un rayon ") assumeront le statut de prémisses pour un pas éventuel de déduction à venir, à la suite de la verbalisation du théorème ; mais seulement une partie d'entre elles seront utilisées en tant qu'hypothèses du théorème. En effet, comme nous l'avons déjà remarqué dans la description des mécanismes, il est possible à ce moment de comparer l'ensemble de prémisses tirées des propriétés géométriques des éléments du dessin ou des données du problème (dans l'extrait de C/G : "AE est perpendiculaire à OD", " le quadrilatère est un parallélogramme", "AO égal OE égal AD") à l'ensemble des prémisses du théorème ("les diagonales se coupent en leur milieu" et "les diagonales sont perpendiculaires"), car toutes les propositions ont le même statut opératoire potentiel.

Revenons sur la comparaison des deux ensembles d'informations : l'ensemble des prémisses issues de l'hypothèse du théorème et l'ensemble des prémisses potentielles issues des informations recueillies. C'est à partir de cette comparaison que les élèves peuvent définir l'ensemble des propriétés géométriques qui sont encore à reconnaître sur le dessin, à savoir dans les cas des extraits, "les diagonales se coupent dans leur milieu". Par exemple, dans l'extrait suivant les interventions soulignées montrent comment la verbalisation de l'énoncé du théorème [intervention 47, voir extrait précédent] guide l'appréhension opératoire sur le dessin permettant d'isoler comme unités figurales les diagonales du quadrilatère, nécessaires pour reconnaître les relations géométriques demandées dans l'hypothèse manquante. Ce que permet aussi la verbalisation de l'énoncé du théorème, comme nous l'avons remarqué ci-dessus, est l'inutilité de démontrer des propriétés vues sur le dessin lorsqu'elles sont conclusions du théorème.

Verbalisation de l'énoncé du théorème « un quadrilatère dont les diagonales sont perpendiculaires et elles se coupent dans leur milieu est un losange »

52. J : mais <u>il faut prouver par rapport aux diagonales</u>, dans ce cas là
53. K : donc, attends <u>les diagonales c'est AE et DO</u>… [appréhension opératoire permettant d'isoler la sous configuration des diagonales du quadrilatère]
54. J : ou alors, <u>OD c'est sûr que c'est un rayon</u> [appréhension opératoire permettant d'isoler OD comme rayon du cercle]
55. K: <u>déjà on sait que OD est perpendiculaire à AE</u> puisque
56. J: mais ça arrêt de le dire

57. K: mais j'ai pas marqué [---] donc OD est perpendiculaire à AE
58. ……..
59. J : ben c'est surtout qui se coupent dans leur milieu [re-verbalisation d'une des prémisses du théorème] Attends on réfléchit deux minutes avant de…AO égal AD
61. J: OD est perpendiculaire à AE
62. K : mais d'accord…. on sait
63. J : donc, AE est perpendiculaire à OD et on cherche à prouver que ben qu'elles se coupent dans le milieu quoi [re-verbalisation d'une des prémisses du théorème]

………

69. J : il y a peut être un truc avec les vecteurs [appréhension opératoire permettant d'isoler la configuration du théorème « somme de vecteurs »]

……….

Or, à partir des nombreux extraits recueillis dans les protocoles, nous nous sommes efforcés de définir de façon le plus rigoureuse possible comment s'exerce la fonction de guide du langage aussi bien que l'ensemble des conditions sur la base desquels se développe son fonctionnement.

1.1.1.1 Comment s'exerce la fonction de guide du langage

La fonction de guide du langage s'exerce lorsque la verbalisation de l'énoncé d'un théorème (ou plus en général d'un référent théorique mathématique), en imposant un statut opératoire aux propositions composant l'énoncé, guide l'action du sujet lors du processus de résolution afin de vérifier toutes les prémisses de l'hypothèse du théorème et seulement celles-là.

Le rôle de la fonction de guide du langage consiste à :

- éliminer des informations recueillies dans la liste au moyen d'une comparaison avec les prémisses du théorème ou avec la conclusion du théorème (voir les extrait présentés ci-dessus de Camille/ Gaëlle et de Kévin /Jérémie)
- guider l'appréhension opératoire du dessin

L'analyse de la fonction de guide permet alors de répondre à la question de recherche que nous nous sommes posée lors de la définition de notre problématique concernant les raisons pour lesquelles la verbalisation du référent théorique guide les actions du sujet lors du processus de résolution

1.1.1.2 La seule verbalisation du référent théorique mathématique est-elle suffisante pour attribuer une fonction de guide au langage ?

Nous essayerons de définir l'ensemble des conditions nécessaires pour que le langage puisse exercer une fonction de guide. C'est pourquoi nous avons essayé de répondre tout d'abord à la question proposée ci-dessus.

Nous observons que pour exercer la fonction de guide, la seule verbalisation du théorème semble ne pas suffire. Il paraît nécessaire de distinguer des reformulations contextualisées des prémisses du théorème pendant le processus de résolution.

Les extraits que nous présentons dans la suite, fournissent un exemple de ce fait : malgré la verbalisation de l'énoncé du théorème soit explicitée, l'absence de re-verbalisations des prémisses du théorème lors du processus, correspond à l'absence de la fonction de guide pour le processus de résolution. Des deux extraits nous tirons des raisons possibles pour ces échecs.

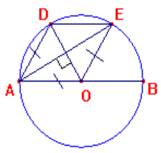
Considérons l'extrait suivant (Olivier /Djamel, problème A1) de l'intervention [23] à l'intervention [36]. La verbalisation de l'énoncé du théorème ne débuche toute de suite ni sur la re-verbalisation des prémisses du théorème, ni sur une appréhension opératoire du dessin. En effet, la fonction de guide semble ne s'exercer pas parce qu'il n'y a pas des prémisses du théorème directement visible sur le dessin : les élèves ne voient pas sur le dessin une solution immédiate pour prouver la prémisse « les diagonales se coupent dans leur milieu » et donc ils comment à chercher des informations sur le dessin. La verbalisation de l'énoncé du théorème n'implique pas en ce moment la fonction de guide ; on est plutôt au début du processus où on a un recueil d'informations. En effet, dans l'intervention [23] l'énoncé du théorème (en noir) n'est pas verbalisé de façon complète. L'hypothèse « les diagonales se coupent dans leur milieu » n'est considérée ici que partiellement car le seul milieu de OD est pris en charge et il est tiré de l'interprétation du dessin. Dans l'intervention [24] par contre, le camarade verbalise l'hypothèse manquante de façon complète mais comme les élèves ne sont pas du même avis, (Olivier ne suit pas Djamel), Olivier ne pense pas que les prémisses du théorème proposé par Djamel sont démontrées et donc il cherche sur le dessin des autres informations (interventions [26], [29]). Les élèves sont amenés à recueillir des informations sur le dessin (interventions [32], [34]) sans que cette recherche soit guidée par le statut opératoire des prémisses du théorème (interventions [23], [24]). Ainsi, les informations recueillies conduisent les deux élèves à la formulation implicite d'un autre théorème (intervention [34]) qui les oblige à la vérification d'autres hypothèses (intervention [36]) et donc à la recherche d'autres relations géométriques sur le dessin.

En revanche, à partir de l'intervention [37], la verbalisation de l'énoncé du théorème faite en précédence par Djamel à l'intervention [23], semble guider son processus. En effet, il re-verbalise une des prémisses de l'énoncé du théorème et cherche à la prouver.

On remarque comment à ce moment le processus de Olivier (intervention [42]) est guidé par la verbalisation du théorème proposé par Djamel en [23] et par les hypothèses du théorème non explicite qu'il a proposé en [32], [43] et [36].

- Extrait du protocole de Djamel et Olivier (problème A1)

23 D: mais non, **il faut montrer que OADE est un losange!**



Donc, c'est parti ! Alors….
Ben, ben …c'est fini!
Parce que les diagonales sont perpendiculaires, donc, si les diagonales sont perpendiculaires c'est un losange…. ah non, merde, il faut que …
Ah, oui, puisque les diagonales sont perpendiculaires et passent par le milieu de OD

24 O: ah oui, parce qu'<u>ils se coupent dans leur milieu</u>

25 D: donc c'est un losange…. Nous avons trouvé la réponse

26 O: mais attends, mais non, tu sais ce que tu fais? ce que tu fais, regarde, ça c'est égal à ça *(AD est égal OA)* et ça c'est égal à ça *(AD est égal OD)*

27 D: non, on est bête, mais regarde: OD est égal à OE est égal à OA parce que ces sont des rayons du cercle, trois rayons …donc…comme ça *(DA)* est égal à ça *(AO)*, que AD est égal AO, donc DE est égal à OE

28 O: comment tu sais que c'est DE ?

29 D: …. Mais non, regarde, …
Comme dans le résumé, dans l'énoncé on dit que AD est égal à AO et que OE est un rayon, donc il est égal à AO parce que OA est un rayon. Donc OE est égal à AO qui est égal à AD, et….

32 O: je sais! s'<u>il y a deux côtés opposés qui sont égaux</u>, donc c'est un …

33 D: losange

34 O: <u>c'est un parallélogramme</u>, et donc comme il y a un angle droit comme les diagonales se coupent en un angle droit alors c'est un losange.

35 D: nous avons trouvé la réponse

36 O: <u>NON, il faut prouver qu'ils sont parallèles</u>. Parce que, soit tu prouves que ces deux là sont parallèles, donc c'est bon, soit tu prouves…soit tu prouves que ça *(AO)* c'est égal à ça *(DE)*, que ça *(DA)* c'est égal à ça *(EO)* mais tu ne peux pas dire que si ça *(DA)* c'est égal à ça *(EO)* c'est un parallélogramme

37 D: mais <u>si on prouve que DO coupe dans le milieu de AE</u> et comme ça coupe au milieu et <u>on a un angle droit alors c'est un losange. Il faut dire que DO coupe en le milieu de AE</u>

38 O: non, ça serve pas !

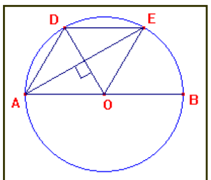
39 D: tout semple, c'est la symétrie…

40 O: mais non, c'est parce que ça c'est un triangle isocèle

41 D: ben oui, on dit que c'est la symétrie

42 O: **puis que** ça c'est perpend…, puis que ça coupe… ça coupe mâchant truc là…au milieu, et que c'est la hauteur, donc c'est la médiane, la hauteur et c'est la médiatrice, donc celui là c'est un losange … attends, non c'est un triangle isocèle, et donc ça *(AO)* est égal à ça *(AD)* et donc comme ça *(AO)* est égal à ça *(OE)* et il est égal à ça *(DE)*.. attends maintenant il faut…. attends
Madame! il faut écrire ou on dit juste …

- L'extrait du protocole de Elena / Alessandra, Problème B1.



2.E : […] AE est perpendiculaire à AD, AO=AD. Démontrer que OADE est un losange…AO est un rayon du cercle, OD est un rayon du cercle, OE est rayon du cercle, AD=AO donnée, donc **le losange… est un quadrilatère ayant les quatre côtés égaux**

7.A : je ne comprends pas qu'est-ce que tu veux faire !
8.E : AO, OE et <u>OD sont rayons du cercle</u>, et ils sont égaux… ah oui, <u>OD il sert à rien</u> !
9.A : <u>pour quoi ça sert pas ?</u>
10 E : <u>parce qu'il est une diagonale</u>… puis AD est égal AO….
…
16.E : AHO est un triangle rectangle, AO et AD donc AOD est un triangle isocèle, mais c'est mieux, il est équilatéral. Donc le triangle AHO est un triangle particulier ayant les angles de 30, 60 et 90°
…..
27. E : je ne sais pas encore mais…même le triangle DEO devrait être équilatéral
28. A : pour quoi tu veux démontrer ça ?
29. E : je ne sais pas, mais il paraît qu'il est équilatéral
…
43. E : et tous ces triangles sont isométriques (*les quatre triangles rectangles ayant l'angle droit en H)* par la propriété transitive car AD est égale à OA, il est donnée dans l'énoncé, AO est égale à OE car ils sont des rayons et DE est égale aux rayons car… on vient de le montrer. Et puis ils sont tous des triangles rectangles.
44. A : et aussi parce que DH et HO sont égaux et tous les triangles ont ces côtés là
45. E. donc ils sont tous isométriques et donc…donc quoi ?
…
47.E : et puis…même AH et HE sont égaux et même DH et HO sont égaux. Donc…on avait un théorème où… les diagonales d'un parallélogramme se coupent dans leur milieu
44. A : il serait : si les diagonales d'un quadrilatère se coupent dans leur milieu, alors le quadrilatère est un parallélogramme.
…
51. En supposant que ça marche (*le quadrilatère est un parallélogramme)* **il y a un parallélogramme ayant les quatre côtés égaux, donc il est un losange.**
52.A : ouais, il est un losange mais on va regarder sur le manuel. Donc on regarde sur parallélogramme… « dans un parallélogramme les diagonales se coupent dans leur milieu » . Voilà. Donc s'il arrive ça, il est un parallélogramme, donc le notre [quadrilatère] est un parallélogramme, et après ?
53.E : on avait dit que s'il a aussi les côtés égaux il est un losange
54. A : sur le manuel… « un parallélogramme ayant les cotés égaux est un losange », ben voilà !
…solution

À une première liste d'informations, suit la verbalisation du théorème « un quadrilatère ayant quatre côtés égaux est un losange » dans l'intervention [2]. Ensuite, les élèves recueillent des autres informations (de l'intervention [8], à l'intervention [29]) à ajouter à la liste, sans que la verbalisation du théorème constitue un guide. En effet, comme les élèves ne reformulent pas l'hypothèse manquante du théorème en la contextualisant dans le processus, la finalité de cette liste s'approche beaucoup d'une *recherche* d'informations plutôt que d'une leur *vérification*. Nous aborderons la question de la finalité de la liste dans le paragraphe consacré aux modèles d'actions des élèves dans ce chapitre (paragraphe 1.4.1.2). La verbalisation de l'énoncé du théorème n'exerce pas la fonction de guide et cela est mis en évidence par un double fait : d'une part, l'absence de la reformulation contextualisée de l'hypothèse du théorème au cours du processus, d'autre part, le fait que les élèves démontrent que le triangle DEO est équilatéral simplement pour ajouter une information à la liste, sans s'apercevoir que l'hypothèse du théorème est ainsi vérifiée. Un rassemblement de la liste avec l'ajout d'autres informations amène les élèves à la verbalisation d'un autre théorème en [51] qui, cette fois-ci, agit comme guide sur le processus. Les élèves en effet, re-verbalisent les prémisses contextualisées du théorème (interventions [52], [53], [54]) et cette réformation fonctionne comme guide pour le processus de résolution.

La question suivante se pose alors : pourquoi la première verbalisation du théorème issue de l'intervention [2] n'a pas agi comme guide pour les élèves, tandis que la verbalisation suivante, qui apparaît à l'intervention [51], agit comme guide ?

Sur la base des protocoles, nous supposons qu'il faut aux élèves une sorte de « masse critique » pour que la verbalisation d'un théorème puisse fonctionner comme guide. Ainsi, nous avons l'impression que la verbalisation immédiate du théorème en [2] sans avoir recueilli une liste consistante d'informations, peut se faire sans construction d'un lien avec les référents théoriques pour en tirer des pas de déduction.

En résumé, les conditions pour que la verbalisation d'un théorème puisse exercer une fonction de guide sur le processus sont essentiellement au nombre de deux :

- l'existence d'une masse critique d'informations qui fait de « support » à la verbalisation du théorème
- ation au cours du processus des prémisses de l'énoncé du théorème qu'il faut appliquer (cette re-verbalisation corresponde aussi à un des critères pour reconnaître la fonction de guide du langage).

1.1.1.3 Degré d'importance d'une fonction

De l'analyse des protocoles nous avons tiré l'idée d'un degré d'importance des fonctions.

Nous retenons comme le **degré d'importance d'une fonction** le nombre d'occurrences de cette fonction sur le nombre des tours de parole du processus de résolution.

Dans le Tableau suivant nous montrerons le degré d'importance de la fonction de guide dans certains protocoles.

Degré d'importance de la fonction de guide dans le processus de résolution de certains protocoles

Problèmes A et B	Fonction de guide
Camille/ Gaëlle A1	5/84
Kévin / Jérémie A1	11/175
Vito /Davide B1	2/77 (V) ; 4/77 (D)
Alessandra/Elena B1	1/56

Pour que la fonction de guide s'exerce il faut que l'énoncé du théorème, en particulier l'énoncé du théorème dont la conclusion on constitue la réponde au problème, soit verbalisé. Remarquons que, le problème 3 diffère de ce point de vue des problèmes 1 et 2. En effet, le théorème utile à sa résolution n'est pas congruent à sa question et la verbalisation de l'énoncé ne guide pas le processus. La fonction de guide ne s'est pas exercée dans ces protocoles car la résolution du problème est essentiellement dirigée par l'appréhension opératoire qui mettait en jeu la fonction d'association du langage par l'intermédiaire de la configuration étiquette (cf. paragraphe 1.1.5.3) : la configuration du triangle rectangle inscrit dans un demi-cercle a joué dans tous les binômes concernés le rôle de configuration étiquette.

Le degré d'importance de la fonction de guide dépend du coût de l'application du théorème évoqué. L'application d'un théorème peut être coûteuse ou non en raison de l'existence d'autres théorèmes du curriculum, c'est-à-dire des connaissances préalables des élèves et des leurs habitudes. Donc, le degré d'importance de la fonction de guide est autant mineur que le coût d'application du théorème augmente.

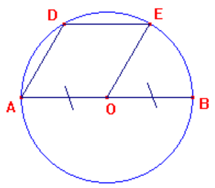
Par exemple, en France le coût d'application du théorème [1] « un quadrilatère ayant quatre côtés égaux est un losange » est plus grand que le coût d'application du théorème [2] « un quadrilatère ayant les diagonales perpendiculaires qui se coupent dans leur milieu est un losange » (l'application du théorème [1] n'est pas trop compliquée en s'appuyant sur les critères d'isométrie des triangles mais elle est plus compliquée lorsqu'on s'appuie sur la géométrie des transformations, cf. paragraphe 1.1.5.10). Dans le protocole de Kévin et Jérémie, on relève que le degré d'importance de la fonction de guide pour le théorème [1] est de 2/199, tandis que le degré d'importance de la fonction de guide pour le théorème [2] est de 9/199.

Nous remarquons en outre que dans le protocole d'Hana et Christelle si l'on « sollicite » (par des interventions de l'expérimentateur) la fonction de guide du langage exercée par la verbalisation correcte de l'énoncé d'un théorème coûteux pour les élèves, le processus avance quand même sur la base de ce théorème. Donc, même si le coût d'application du théorème devrait faire d'obstacle à l'avancement du processus de résolution et diminuer ainsi le degré d'importance de la fonction de guide, l'action « sollicitée » de la fonction de guide aide l'avancement du processus de résolution. Il y a là une piste possible d'utilisation par les enseignants de la fonction de guide du langage.

A partir du « degré d'importance » que les fonctions jouent lors des processus de résolution, il est possible d'avancer l'hypothèse que la fonction de guide est presque absente lorsque la difficulté du problème diminue.

Le protocole de Elena et Luca montre bien que la fonction de guide du langage n'apparaît pas au cours de leur processus de résolution car, comme les élèves mêmes le disent, le problème est jugé facile à résoudre. Ainsi, en 17 tours de parole le problème est résolu.

```
Luca et Elena (Problème B2)
```



- **AB diametro del cerchio**
- **O centro del cerchio**
- OADE è un parallelogrammo

Dimostrare che OADE è un rombo

1. E: E' una scemata! Questo è un parallelogramma, AO deve essere uguale ad OE, AO è raggio, OE raggio e sono uguali.
2. L: mi sembra troppo facile….
3. E: adesso chiamiamo il Prof e glielo chiediamo.
4. B: perché il Prof?
5. E: no, perché mi sembra troppo facile, allora…ma è solo uno?
6. E: scriviamo, *AO è uguale a OE*
7. L: *perché sono tutte e due*
8. E*: no, aspetta, AO è uguale a OE*
9. L: *dalla figura si può notare immediatamente che…*
10. E: *essendo O centro della circonferenza, ed A e E punti appartenenti ad essa*
11. L: i segmenti che uniscono i due punti al centro
12. E*: AO e OE sono raggi, quindi uguali tra loro*
13. L: quindi la figura, oltre ad essere un parallelogramma, è anche un rombo
14. E: prima mettiamo che questo è un parallelogramma e quindi ne segue che…
15. L: aspetta, facciamo vedere che sappiamo anche le formule e mettiamo OE è congruente ad AD perché è un parallelogramma
16. E: allora mettiamo qua, con un asterisco, che **essendo parallelogramma ha i due lati opposti paralleli e congruenti, quindi siccome i due lati consecutivi sono congruenti è un rombo**
17. L: quindi basta dire quello che abbiamo già detto che …..*(interventi 7/12)*
Ma non è che c'è un tranello? Perché è troppo facile!

L'analyse des protocoles a mis aussi en évidence que la fonction de guide semble être dépendante non seulement de la difficulté du problème mais du profil du binôme : élèves forts, élèves faibles, déséquilibre entre les élèves… dont nous aborderons l'analyse au paragraphe 2.

En résumé, le degré d'importance de la fonction de guide dépend du profil des binômes, de la difficulté des problèmes et du coût d'application des théorèmes.

1.1.1.4 Relation entre le degré d'importance de la fonction de guide du langage et la justesse du théorème évoqué

Rappelons que les critères pour reconnaître la fonction de guide du langage lors du processus de résolution sont essentiellement au nombre de deux :

- la verbalisation du théorème (elle ne doit pas être nécessairement correcte)
- la re-verbalisation au cours du processus de résolution des prémisses de l'hypothèse du théorème

Mais la verbalisation <u>correcte ou incorrecte</u> de l'énoncé du théorème exerce-t-elle une influence sur le degré d'importance de la fonction de guide lors du processus ?

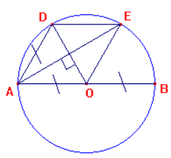
Nous n'avons pas remarqué lors de l'analyse des protocoles, d'exemples d'application d'un théorème incorrect jusqu'à sa conclusion, mais nous avons remarqué plutôt l'application d'un théorème dont l'hypothèse était incomplète. Ainsi, lors du processus de résolution les prémisses manquantes de l'hypothèse du théorème correcte, sont ajoutées à fur et au mesure.

En général, de l'analyse des protocoles nous tirons que le degré d'importance de la fonction de guide dépend de la justesse du théorème évoqué : le degré d'importance est autant plus fort que la verbalisation de l'énoncé du théorème évoqué est complète. Mais ce qui est le plus intéressant de retenir est que la fonction de guide exercée par la verbalisation incomplète de l'énoncé du théorème peut favoriser l'ajoute des prémisses manquantes au cours du processus.

1.1.2 Fonction de planification

Le but de ce paragraphe est de définir la *fonction de planification* du langage et les conditions de son fonctionnement. Les extraits de quelques protocoles permettent d'illustrer la démarche de cette fonction du langage. Ensuite, seront proposées une définition de la fonction de planification du langage, et les conditions nécessaires pour son fonctionnement.

- Extrait du protocole Vito-Davide[6] (Problème B1)



8. V : <u>Pour un losange il suffit que tous les quatre cotés soient égaux</u>
9. D : <u>Ou bien que les diagonales soient perpendiculaires et qui se coupent dans leur milieu</u>.
10. V : Voyons ce que nous avons : nous avons AO égal à r (*rayon*), nous avons que EO est aussi égal à r donc nous avons AO égal OE. **Donc nous avons déjà deux conditions satisfaites. Maintenant il faudrait démontrer que DE est égal à OA ou bien qu'ils sont parallèles**
11. D : moi, par contre, **je ferais comme ça** : comme il est codé ici un angle (*le codage de l'angle droit*), l'intersection des diagonales, nous avons les diagonales qui sont perpendiculaires (*données de l'énoncé*), **alors nous pouvons vérifier, par les critères**

[6] Pour l'extrait en langue Italienne, voir le protocole du binôme Vito/Davide en annexe

d'isométrie des triangles, si elles (*les diagonales*) se coupent vraiment dans leur milieu. Moi, je vais marquer que les diagonales sont perpendiculaires
12. V : mais attends, DE est une corde. **Maintenant nous avons tout ce qu'il nous faut, la seule chose que nous manque est DE, mais on peut trouver, par les critères d'isométrie des triangles, que le triangle AOD est superposable au triangle ODE.**

Soit le théorème « pilote » de l'intervention [8] (nous définirons dans le paragraphe 1.1.3.2 le terme « théorème pilote »), soit le théorème « pilote » de l'intervention [9] permettent de définir un projet de pas de déduction qui, à partir de certaines prémisses (données de l'énoncé ou informations recueillies par des pas de déduction), illustre un plan d'enchaînement de pas déductifs nécessaires pour aboutir à la conclusion.

Comme on vient de le dire, la verbalisation du théorème: « Pour un losange il suffit que tous les quatre cotés soient égaux » (intervention [8]) en jouant une fonction de guide, assigne aux informations recueillies le statut de prémisses : « AO=r », « OE=r » et « AO=OE ». Cela permet la comparaison entre l'ensemble des prémisses issues de l'appréhension opératoire sur le dessin et l'ensemble des prémisses du théorème à vérifier, car les propositions ont toutes le même statut opératoire potentiel. Dès lors, on pourra cerner l'ensemble des prémisses du théorème qui sont encore à vérifier (dans le cas, AD=DE).

C'est à cette étape que se dégage le projet correspondant au théorème pilote de l'intervention [8] par un méta-discours en [10]. Les critères qui nous permettent de relever ce projet sont la modalité « falloir », au temps conditionnel, accompagnée par le verbe « démontrer »[7]. Dès que l'on a trouvé la prémisse encore à vérifier pour que le théorème pilote soit utilisable, l'élève propose un autre énoncé tiers nécessaire pour aboutir à la vérification de la prémisse manquante, dans le cas précédent, un des critères d'isométrie des triangles [12]. De même, la verbalisation du théorème: « [Pour un losange il faut] que les diagonales soient perpendiculaires et se coupent dans leur milieu» (intervention [9]) en jouant une fonction de guide, assigne à la donnée de l'énoncé « les diagonales sont perpendiculaires » le statut de prémisses. Il découle à ce moment le projet de vérification de la prémisse manquante (« les diagonales se coupent dans leur milieu ») et l'élève propose un des critères d'isométrie des triangles comme un autre énoncé tiers pour aboutir à la vérification de cette prémisse [11].

Parfois, il arrive qu'un projet soit superposé à un autre par la vérification de la dépendance directe de l'un à l'autre. C'est pourquoi nous l'appellerons « projet dominant ». Dans les extraits suivants le projet dominant est celui qui permet de montrer que les diagonales sont perpendiculaires. En général, le projet dominant est celui issu de la verbalisation correcte et

[7] On reconnaît des autres exemples de la fonction de planification mises en évidence par la modalité « falloir », par exemple, aux interventions [36], [97] et [142] du protocole K/J. Voir annexes.

complète d'un théorème pilote. C'est pourquoi, les projets qui sont substitués par des projets dominants dans les deux extraits suivants, sont issus de la verbalisation non complète d'un théorème pilote [19] ou [47] :

9. G: ça est égal ça (*en indiquant AO et AD)* ça c'est un parallélogramme AO égal OE égal AD donc ça fait un parallélogramme…
16. G: En fait ce côté c'est le même que celui là *(AD et OE)*, hein, il faut dire qu'elles sont parallèles aussi …t'as jamais utilisé le triangle rectangle dans le cercle? Je ne sais plus (*elle trace le segment BE)*
19. C: mais oui, mais….. enfin …ce n'est pas la peine de dire qu'elles sont parallèles à partir du moment qu'on sait que c'est un quadrilatère où les diagonales se coupent dans leur milieu et perpendiculairement, dans ce cas là c'est évident qu'elles sont parallèles, non?

42. J : les cotés opposés sont parallèles, et ça c'est un rayon *(OE)*
On sait que c'est un parallélogramme, il faut prouver que c'est un losange justement, c'est un parallélogramme spécial. Bon alors, pour prouver que ces cotés sont parallèles …
Bien AD égal AO, AO c'est le rayon et EO c'est un rayon du cercle donc forcement AD il est parallèle
47. K : mais tu n'as pas besoin de prouver que c'est un parallélogramme, tu dis que c'est un quadrilatère dont les diagonales se coupent dans leur milieu et elles sont perpendiculaires, et c'est un losange

Remarquons que, dans le protocole du binôme C/G, les interventions [9] et [16] n'expriment pas la verbalisation complète d'un théorème pilote, et, par conséquent, elles n'expriment pas un projet dominant. De même, dans l'intervention [42] du protocole de K/J, la seule caractérisation du losange en terme d'un parallélogramme « spécial » ne suffit pas pour en tirer un projet dominant.

1.1.2.1 Comment s'exerce la fonction de planification du langage

La **fonction de planification du langage** s'exerce à la suite de la verbalisation de l'énoncé d'un théorème et consiste d'un projet de vérification des prémisses manquantes du théorème. Dés que les prémisses à vérifier sont reconnues (fonction de guide), la fonction de planification du langage permet la construction d'un projet des pas de déduction nécessaires pour vérifier chaque prémisses.

Remarquons que la planification de la vérification des prémisses manquantes n'implique pas nécessairement le déroulement strict des pas de déduction.

Par exemple, la planification des pas de déduction nécessaires pour conclure que les diagonales du quadrilatère se coupent dans leur milieu, peut démarrer par la vérification que AH = HE (H point d'intersection des diagonales) en supposant que les triangles AHO et OHE soient isométriques (ou que A soit le symétrique de E par rapport à la droite (OD)) ou bien procéder au sens contraire : après avoir vérifié que les triangles AHO et OHE sont isométriques (ou bien avoir montré que le point A est symétrique du point E par rapport à la droite (OD)) conclure que AH=HE.

De l'analyse des protocoles, nous avons constaté que la verbalisation de l'énoncé du théorème relève la fonction de guide et permet de reconnaître les prémisses à démontrer. Par conséquent, la re-verbalisation des prémisses au cours du processus peut activer un processus de planification. La re-verbalisation des prémisses au cours du processus est souvent mis en acte par une question directe posée par le camarade

Or, pour ce qui concerne la question directe, nous avons remarqué qu'elle peut induire l'explicitation d'un méta-discours à propos d'un projet de résolution et cela confirme que le choix de l'interaction verbale entre les élèves constitue un apport essentiel pour l'avancée dans la résolution. À ce propos citons deux extraits du protocole de Kévin et Jérémie (Problème A1) :

107.J : moi je ne comprends pas ce que tu veux faire avec les angles ! [question implicite]
108.K : si on prouve que celui là est égal à celui là (*DAI et IAO)* et si on prouve ça on sait que c'est le milieu donc la droite là c'est une bissectrice de l'angle aussi, prouver que les angles ici sont égaux, comme ça on sait que c'est le milieu [projet]

24. K : t'es sûr qu'ils se coupent dans leur milieu? [question directe]
25. J : non, ça faudrait prouver ça, mais perpendiculaires ça c'est sur ! [projet]

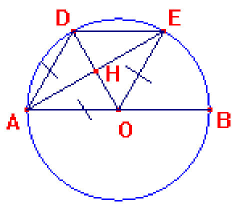
Ou encore, l'extrait du protocole de Camille et Gaëlle (Problème B1) montre comment un projet peut être déclenché par une question directe posée par le camarade :

21 C: ouais, mais dans ce cas là se coupent dans leur milieu
22 G: et comment tu peux savoir qu'elles se coupent dans leur milieu? [question directe]
23 C: ben justement, c'est ce qu'on veut démontrer, non? [projet1]
…….
36 G: peut être on peut démontrer, ... tiens regarde ça c'est symétrique par rapport à ça (*AO et DE)* donc en fait c'est le même
37 C: et alors? [question directe]
38 G: et après il faut qu'on puisse démontrer qu'il est parallèle à celui là [projet 2]
39 C: ouais, mais ce qu'il nous faut c'est de dire que c'est le milieu là, ce truc, non?

1.1.2.2 Théorème pilote

Il est évident que non touts les théorèmes utilisés dans le processus de résolution sont verbalisés et il est évident aussi que leurs prémisses sont également vérifiées sans le recours à la verbalisation d'un projet de pas de déduction. Alors, quels sont les théorèmes dont est ressenti la nécessité de verbaliser l'énoncé ? Peut être sont-ils les théorèmes qui ne sont as bien connus des élèves ?

Il paraît que les théorèmes dont est ressentie la nécessité de verbaliser l'énoncé, semblent être des théorèmes *« pilote », c'est-à-dire des théorèmes qui permettent de définir un projet d'un* *ensemble de pas de déduction constituant du processus de résolution*. Par exemple, les théorèmes : (1) «Un quadrilatère ayant les diagonales qui se coupent dans leur milieu et perpendiculairement est un losange » ou (2) « Un quadrilatère ayant quatre côtés égaux est un losange » définissent un ensemble de conditions nécessaires et suffisantes pour fournir la réponse finale au problème. Tandis que, la verbalisation n'est pas ressentie strictement nécessaire pour les théorèmes constituant des autres énoncés tiers qui ne sont pas des théorèmes pilote (ils ne fournissent pas un projet d'un ensemble de pas de déduction mais ils servent seulement pour passer d'une prémisse à une conclusion). En effet, les théorèmes concernant la hauteur et la médiane du triangle isocèle (« dans un triangles la hauteur est aussi médiane est médiatrice » et le réciproque) ou les critères concernant l'isométrie des triangles, ont été verbalisés même s'ils sont des énoncés tiers dans le processus et même s'ils sont sûrement des théorèmes bien connus des élèves. Cela parce qu'ils constituent des théorèmes pilote pour l'avancement de la résolution : dans le cas du théorème concernant la hauteur et la médiane du triangle isocèle, par exemple, sa verbalisation définit un projet d'ensemble de pas de déduction qui sera relié à l'hypothèse manquante du théorème (1), c'est-à-dire : « les diagonales se coupent dans leur milieu ». L'enchaînement de pas de déduction que le théorème permet de planifier sont :

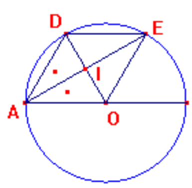


AH est hauteur du triangle isocèle OAD, la hauteur d'un triangle isocèle est aussi médiane et médiatrice, donc, AH est aussi médiane et médiatrice du triangle OAD. Comme AH est médiane, H est le milieu de côté [OD] du triangle OAD, c'est pourquoi la diagonale [AE] du quadrilatère OADE coupe [OD] en son milieu.

1.1.2.3 L'usage des théorèmes

La verbalisation (complète) de l'énoncé d'un théorème aide les élèves à son utilisation correcte (vérification des toutes les prémisses du théorème et seulement celles-là), cela dans la plupart des cas, mais l'analyse des protocoles montre aussi que certains théorèmes, n'étant pas verbalisés, sont pourtant utilisés de façon correcte. Ceci est en apparente contradiction avec ce qu'on vient de dire dans le paragraphe précédent.

A ce propos nous considérons l'extrait suivant (Problème A1):



109.K : si on prouve que celui là est égal à celui là (*les angles DAI et IAO)* et si on prouve ça, on sait que c'est le milieu donc la droite là c'est une bissectrice de l'angle aussi, prouver que les angles ici sont égaux, comme ça on sait que c'est le milieu

110.J : ouais, **parce qu'il est isocèle** *(le triangle OAD)*, **sinon c'est pas vrai**

111.K : ouais mais je sais, il faudrait que…c'est ça qu'il faut prouver, il

nous manque juste un angle **112.**K : **il est isocèle le triangle ADO parce qu'il a deux cotés de même longueur** 113.J : c'est sûr, c'est des rayons

La définition du triangle isocèle : « un triangle ayant deux cotés égaux est isocèle » n'est pas verbalisée avant d'être utilisée (interventions [109, [119]] et [112]), pourtant elle est utilisée de façon correcte. Ou encore, le théorème « tous les rayons du cercle ont la même longueur » n'est pas verbalisé, mais il est utilisé de façon correcte plusieurs fois dans le processus (par exemple, dans l'intervention [113]).

En général, certains théorèmes sont utilisés de façon correcte mais ils ne sont presque jamais verbalisés, comme les théorèmes de l'extrait ci-dessus, et ce fait revient dans plusieurs protocoles de notre expérimentation. La caractéristique commune de ces théorèmes semble être le fait qu'ils sont très connus des élèves et que leur usage ne semble pas poser des problèmes. Comme on verra dans le Tableau 6.1 ci joint, le pourcentage de verbalisation de certains théorèmes dans les protocoles de notre expérimentation est plutôt bas, cela nous permet d'en tirer un résultat pour notre recherche : **les théorèmes et les définitions qui sont en acte[8] dans les processus de résolution, n'ont pas besoin d'être verbalisés pour être utilisés de façon correcte, tandis que la verbalisation correcte et complète de l'énoncé de théorèmes que les élèves ne peuvent pas engager immédiatement dans l'action, semble être nécessaire pour leur application correcte.**

À partir de cette remarque, on peut conclure qu'il y a différents usages des théorèmes utilisés dans les processus de résolution. C'est pourquoi, nous parlerons de la pluralité *d'usage des théorèmes*.

Le Tableau 6.1 vise à relier les théorèmes et les définitions utilisés de façon correcte au fait qu'ils ont été verbalisés ou non verbalisés : dans la première colonne nous indiquons les énoncés des théorèmes, dans la deuxième colonne nous mentionnons les protocoles où ces théorèmes ont été verbalisés, et dans la troisième colonne, les protocoles où ces théorèmes ne sont pas verbalisés.

[8] Nous adopterons la définition de théorème-en-acte issue de la théorie de Vergnaud qui considère ces théorèmes en tant qu'invariants de type « propositions », susceptibles d'être vrais ou faux.

Tableau 6.1[9]

THÉORÈMES et DÉFINITIONS UTILISÉS De façon correcte	**THÉORÈMES VERBALISÉS connaissance non en acte**	**THÉORÈMES NON VERBALISÉS connaissance en acte**
1.Un quadrilatère ayant les diagonales qui se coupent dans leur milieu et perpendiculairement est un losange	K/J;V/D; C/G	E/B
1'. Un parallélogramme ayant les diagonales qui se coupent perpendiculairement est un losange	T/S	
2.Un quadrilatère ayant quatre côtés égaux est un losange	K/J ; A/E; V/D; O/D	
3.Un parallélogramme ayant deux côtés consécutifs égaux est un losange		H/C ; L/E
4.Un parallélogramme ayant quatre côtés égaux est un losange	H/C	
5.Un triangle ayant deux côtés égaux est un triangle isocèle		K/J ; C/G ; E/A
6.Un triangle ayant trois côtés égaux est un triangle équilatéral		V/D
7.Les rayons du cercle ont tous la même longueur		K/J ; C/G ; E/A; O/D; V/D
8.Si la médiane, la hauteur et la médiatrice d'un triangle sont confondues alors le triangle est isocèle	O/D	
8'. Dans un triangle isocèle, la hauteur est aussi médiane et médiatrice	C/G; O/D; E/B	K/J
9.Les critères d'isométrie des triangles		E/A ; E/B; V/D
10.Un quadrilatère ayant les diagonales qui se coupent dans leur milieu est un parallélogramme	E/A	
11.Deux droites coupées par une transversale sont parallèles si les angles alternes internes sont égaux.		E/B
12.Un triangle inscrit dans un demi-cercle est un triangle rectangle	E/B	V/D; C/G

[9] E/B (Elena et Barbara); E/A (Elena et Alessandra); K/J (Kévin et Jérémie); O/D (Olivier et Djamel); C/G (Camille et Gaëlle) ; V/D (Vito et Davide) ; H/C (Hana et Christelle) ; T/S (Taina et Sophie)

L'usage d'un théorème consiste dans la verbalisation de son énoncé et en son application. Il en ressort, que la verbalisation de l'énoncé du théorème est susceptible de fonctionner à la fois comme outil pour que la fonction de guide s'exerce et comme révélateur d'une fonction de guide. L'usage d'un théorème est conditionné par la nature de cette verbalisation, c'est-à-dire pour son caractère complet, correcte ou non mais ce fait n'exclut pas qu'une fonction de guide s'exerce lors de la verbalisation quoi que soit son caractère. C'est pourquoi, nous considérons la **verbalisation de l'énoncé du théorème comme un outil pour le chercheur dans l'analyse de la résolution**.

Dès lors, trois questions importantes se posent :

- Y a-t-il toujours absence de verbalisation pour les théorèmes en acte qui sont pourtant utilisés de façon correcte ?
- Tous les théorèmes non immédiats sont-ils verbalisés pour leur utilisation correcte ?
- Comment le caractère de la verbalisation des théorèmes (en acte et non immédiate) influence-t-il la résolution du problème ?

Or, comme Vergnaud le souligne, certains théorèmes peuvent être verbalisés même s'ils sont des théorèmes en acte.

L'analyse des processus montre que, tous les théorèmes ne doivent pas être verbalisés pour être utilisés de façon correcte et cela dépend fortement du fait que le théorème peut être une connaissance en acte. Cependant, les résultats de l'analyse montrent aussi que le fait d'être une connaissance en acte n'implique pas qu'elle ne sera jamais verbalisée au cours du processus.

Il semble alors que le Tableau 6.1 représentant le traitement des théorèmes et leur verbalisation comme outils pour la résolution, doit être interprété de façon plus nuancée.

Le Tableau 6.2 rassemble les cas de verbalisations et d'absence de verbalisation :

Tableau 6.2

Verbalisation	Pas de verbalisation
Théorème non immédiat	Théorème en acte « non pilote »
Théorème en acte « pilote »	Théorème immédiat « non pilote »

1.1.3 Fonction de contrôle

Le but de ce paragraphe est de préciser la *fonction de contrôle* du langage et les conditions de son fonctionnement. Voici quelques extraits de protocoles qui servent à illustrer cette fonction.

- Extrait du protocole de Elena et Barbara (Problème A1)

…stavo pensando, ma il rombo? Ha quattro lati uguali, però ce li ha anche il quadrato e poi…

B: sì, anche le diagonali

E: le diagonali perpendicolari

B: aspetta, ce ne manca una *(condizione)* le diagonali perpendicolari che si tagliano nel loro punto medio

Verbalisation du théorème pilote

E: …mais le losange, il a les diagonales perpendiculaires

B : oui mais attends, il en manque une *(condition)* parce que les diagonales sont perpendiculaires mais elles se coupent dans leur milieu

………Processus de résolution…….

B : Oui (*le quadrilatère est un losange*), parce qu'on avait dit que si un … si les diagonales sont perpendiculaires et elles se coupent dans leur milieu, il est un losange, et nous on sait qu'elles sont perpendiculaires car… car il est donné et puis on sait que AK=KE et que OK=KD car on a démontré que les quatre triangles rectangles OAK, KAD, DKE e EKO sont isométriques pour le critère d'isométrie des triangles rectangles et puis… oui, on les a marqués (codés sur le dessin) les angles et les côtés donc il est bien un losange !

Remarquons que les élèves re-verbalisent le théorème pilote à la fin du processus de résolution de façon à contrôler que toutes les prémisses soient vérifiées.

Il est important de souligner, la localisation spatio-temporelle des interventions choisies, le contenu même des interventions et le rôle particulier de la re-verbalisation du théorème à la fin du processus : elle joue une fonction de contrôle su l'application du théorème au cours du processus puisque, pour chaque prémisse re-verbalisée, on revient en pensée sur le processus pour vérifier qu'elle a été prouvée.

À la fin du processus les assertions qui expriment les propriétés géométriques requises dans les prémisses du théorème pilote, assument la valeur *vraie* car elles sont vérifiées. Le rôle de la verbalisation est donc de contrôler que toutes les hypothèses nécessaires pour l'application correcte du théorème aient étés vérifiées.

Nous remarquons de l'analyse des protocoles que, lorsque la fonction de contrôle est présente dans le protocole, elle accompagne toujours les fonctions de guide et de planification. En général, nous avons remarqué que dans la plupart des protocoles, la fonction de contrôle est liée à la fonction de guide. De plus, on verra dans la suite que lorsque la fonction de guide agit de façon forte, alors la fonction de contrôle est présente à la fin du processus, par contre, si la fonction de guide n'agit pas de façon forte, la fonction de contrôle, en tant que re-verbalisation du théorème pilote proposé, n'apparaît pas à la fin du processus de résolution (à ce propos voir le protocole de Olivier et Djamel en Annexe).

Cependant nous remarquons qu'en général, la fonction de contrôle du langage ne s'exerce pas souvent dans nos protocoles. En revanche, la re-verbalisation du théorème pilote qui apparaît souvent à la fin de la phase de rédaction, peut être interprété comme un effet du contrat. Par exemple, dans le protocole de Camille et Gaëlle (problème B1), on peut voir comment chaque prémisse du théorème pilote est reformulée.

12 C: **ouais, ouais, pour un losange il faut dire que les diagonales se coupent dans leur milieu et elles sont perpendiculaires** [verbalisation énoncé du théorème pilote]

processus de résolution

Phase de rédaction de la solution

81 C: et un quadrilatère où les ... dont les diagonales se coupent dans leur milieu [re-verbalisation des prémisses du théorème pilote]

82 G: perpendiculairement

83 G: est un losange

84 C: Donc ADEO est un losange, Voilà!

Ou encore, dans le processus de résolution du problème 3 du même binôme :

37 C: **et AB est perpendiculaire à BE, donc l'angle B fait 180° donc DBE est aligné**

processus de résolution

Phase de rédaction

61 G: l'angle plat ... alors tu mets l'angle DBO égal 180°. Un angle de 180° est un angle plat, donc on peut dire que les points D, B et E *(Gaëlle parle et Camille écrit)*

62 C: donc, attend, donc on obtient une droite, alors on peut dire que DE est une droite, parce qu'il y a un angle plat, alors D, B et E.

63 G: sont alignés

Or, comme la rédaction d'une démonstration oblige les élèves à revenir pas à pas sur le processus de démonstration, nous ne pouvons pas exclure que cela puisse solliciter la fonction de contrôle du langage. Reste le fait qu'un possible révélateur de la fonction de contrôle est la coïncidence des théorèmes verbalisés au début et à la fin du processus d'application du théorème.

1.1.3.1 Comment s'exerce la fonction de contrôle du langage

La **fonction de contrôle du langage** s'exerce grâce à une nouvelle verbalisation du même théorème pilote à la fin du processus de résolution. L'action de contrôle consiste ainsi à vérifier la coïncidence de l'ensemble des hypothèses à vérifier et de l'ensemble des résultats des pas de déduction susceptibles d'avoir prouvé ces hypothèses.

1.1.4 Fonction référentielle

Comme la définition de *fonction référentielle* que nous retenons au cours de notre recherche a été fournie par la théorie de Duval (voire à ce propos le Chapitre II, paragraphe 4.2), le but de ce paragraphe est de mettre en évidence comment elle agit au cours de la résolution d'un problème de démonstration en géométrie plane. Ainsi, nous montrerons comment les opérations par lesquelles la fonction référentielle est accomplie (opération de désignation pure, de catégorisation simple et de description) sont susceptibles de relever des relations entre l'appréhension opératoire du dessin et les référents théoriques. Elles sont donc susceptibles de relever des traitements des concepts en tant que mise en relation entre signifié et signifiant. Présentons tout d'abord un extrait du protocole de Kévin et Jérémie (problème A1), qui montre comment la fonction référentielle fournit un support pour reconnaître les allers et retours entre l'appréhension opératoire du dessin et le référent théorique.

53. K : donc, attends les **diagonales** c'est **AE** et **DO**…
54. J : ou alors, **OD c'est sûr que c'est un rayon**
55. K: déjà on sait que **OD est perpendiculaire à AE** puisque

La fonction référentielle agit ici au moyen d'une opération de description qui consiste à identifier l'objet [OD] en croisant les résultats de plusieurs opérations de catégorisation, c'est-à-dire en identifiant l'objet [OD] par plusieurs classes auxquelles il appartient : [OD] est diagonale du quadrilatère OADE, et [OD] est rayon du cercle (C). Cette opération est possible grâce aussi à l'appréhension opératoire du dessin qui permet d'isoler à la fois le quadrilatère OADE, dont [OD] constitue une des diagonales, et le cercle (C), dont [OD] constitue un des rayons. Il y a une mise en relation biunivoque entre l'appréhension opératoire du dessin, permettant d'isoler le quadrilatère et le cercle, et les référents théoriques en tant que théorèmes-en-acte, permettant d'exprimer les relations entre les rayons du cercle (relation d'égalité) ou entre les diagonales du quadrilatère (relation de perpendicularité).
Encore, dans l'intervention [42] de Kévin et Jérémie (problème A1)

42. J : les cotés opposés sont parallèles, et ça c'est un rayon *(OE)*
On sait que c'est un parallélogramme, il faut prouver que c'est un losange justement, c'est un parallélogramme spécial. Bon alors, pour prouver que ces côtés sont parallèles …
Ben AD égal AO, <u>AO c'est le rayon et EO c'est un rayon du cercle</u> **donc** forcement AD il est parallèle *(à OE)*

La fonction référentielle, remplie par l'opération de catégorisation concernant [AO] et [OE] en tant que rayons du cercle, sert pour recueillir des informations qui constitueront les prémisses pour une inférence de portée locale (mise en évidence par le connecteur « donc ») dont la conclusion est tirée de l'interprétation du dessin. Remarquons que la fonction référentielle et les opérations qui permettent de l'accomplir peuvent viser aussi le recueil d'informations sans forcément mettre en relation l'aspect graphique (dessin) et l'aspect théorique (référent théorique).

En fin, la possibilité pour un même mot de s'adresser à objets différents (tel le terme « parallélogramme » en tant qu'objet théorique ou objet du problème dans le cas de Camille et Gaëlle dans l'extrait suivant, permet l'évolution du processus de résolution puisque dans la communication verbale il y a un déplacement de l'objet du problème à l'objet théorique.

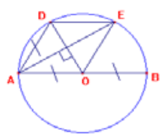
9 G: ça est égal ça (*elle indique AO et AD)* ça c'est un parallélogramme AO égal OE égal AD donc ça fait un parallélogramme 10 C: mais un parallélogramme c'est pas les cotés de la même longueur, c'est les cotés opposés qui sont….

Lorsqu'un même mot désigne deux objets différents tel l'objet « hic et nunc » du problème et l'objet théorique (objet replacé dans la théorie, c'est-à-dire en lien avec les théorèmes dans lesquels il intervient) (voir le mot « parallélogramme »), la fonction référentielle agit de façon différente mais, en tout cas, le rapport entre le dessin (signifiant) et son référent construit par le sujet, lecteur ou constructeur du dessin, constitue le signifié associé à l'objet par le sujet.

1.1.5 Fonction d'association

Le but de ce paragraphe est de décrire comment s'exerce la *fonction d'association* du langage et les conditions de son fonctionnement. Présentons quelques extraits de protocoles afin d'illustrer cette fonction

- Extrait du protocole de Elena / Alessandra (Problème B1)



L'élève vient de considérer le triangle AHO par une appréhension opératoire du dessin (H point d'intersection des diagonales AE et OD) 16.E: … Mais AO et AD, c'est-à-dire le triangle AOD est isocèle. Pour mieux dire, il est **équilatéral**. Donc le triangle AHO est un triangle particulier : le triangle 30, 60 et 90 degrés.

Le mot « **équilatéral** » semble fonctionner comme un **mot étiquette**[10] car il renvoie immédiatement aux propriétés : « tous les angles du triangle équilatéral AOD sont de 60° » et « le triangle est composé des deux triangles rectangles ayants les angles de 90°, 60° et 30° » qu'en Italie on appelle « triangles rectangles particuliers ». Donc, le mot « équilatéral » semble évoquer le concept[11] de triangle équilatéral en passant par les référents théoriques et l'appréhension opératoire du triangle OAD (il est décomposé de deux triangles rectangles particuliers). L'action du langage est d'associer au mot étiquette le/les référents théoriques, c'est pourquoi nous relevons ici une **fonction d'association** du langage. Dans l'extrait

[10] La définition de « mot étiquette » sera développée largement dans le paragraphe suivant.
[11] Nous adoptons ici le « Concept » au sens de Vergnaud. Comme on verra dans le paragraphe suivant, Vergnaud définit le concept en tant qu'un triplet constituée de trois éléments : l'ensemble des situations, l'ensemble des invariantes et l'ensemble des représentations du concept même.

suivant, nous souhaitons mettre en évidence l'action du mot étiquette « **isocèle** » qui renvoie au concept du « triangle isocèle » en passant par certaines de ses propriétés géométriques.

- Extrait du protocole de Camille/ Gaëlle (Problème B1)

42 C: Attends, AO égal AD *(l'élève revient aux données codées sur le dessin)* … et si on prouve que **le triangle DAO est isocèle**,… parce que ça fait quelque chose, tu sais, par rapport à ça *(DO)* 43 G: ouais, parce que c'est la hauteur 44 C: ouais, c'est la hauteur 45 G: ouais, c'est aussi la médiane …AH OUI 46 C: ça veut dire, comme ça c'est la hauteur dans un triangle isocèle est aussi médiane donc……. on peut donner une lettre? (*le point du milieu est nommé H)*

Comme nous l'avons présenté dans l'analyse du protocole de Camille et Gaëlle au Chapitre V, le mot « isocèle » permet d'évoquer le concept de « triangle isocèle » en passant par le théorème « dans un triangle isocèle, la hauteur est aussi médiane et médiatrice ». En effet, la suite des informations « triangle isocèle, hauteur, médiane », étant la « suite standard » en France des propriétés décrivant le triangle isocèle, fonctionne comme une sorte de « comptine » associée à la définition et aux théorèmes du triangle isocèle. L'action d'**association du langage** permet de relier le mot « isocèle » au référent théorique et à ces propriétés.

L'extrait suivant se différencie partiellement des cas précédents par le fait que la **fonction d'association** ne se réalise pas par la seule intervention d'un mot étiquette mais aussi par l'intervention d'une configuration étiquette[12].

- Extrait du protocole de Elena / Alessandra (problème B1)

45. E : …et tous les triangles sont égaux par la propriété de transitivité parce que AD est égal à OA, donnée de l'énoncé, puis AO est égal à OE parce qu'ils sont des rayons et ED est égal aux rayons parce que…parce que l'on vient de le démontrer. Et puis, tous les triangles sont triangles rectangles 46. A : et puis parce que DH et HO sont égaux et tous les triangles ont cette base 47. E : et donc, ils sont tous isométriques. Et donc, donc quoi…. ? 48. A : alors même tous ces petits angles sont égaux, disons en A et en E (*DEH, OEH; DAH, OAH*) **49.** E : puis…ils **sont égaux AH et HE** aussi, **et DH et HO sont égaux** aussi. Et donc,…on n'avait pas un théorème sur…qui <u>disait que les **diagonales** d'un parallélogramme…que dans un parallélogramme les diagonales se coupent dans leur milieu</u>

Ici, l'appréhension opératoire du dessin permet d'isoler la sous-configuration « en croix » des segments DH, HO et AH, HE. Dès que la position des segments a été aperçue, et leur formulation en termes de « diagonales » a été faite, le théorème est évoqué. Or, il est évident

[12] La définition détaillée de « configuration étiquette » sera présentée dans ce chapitre au paragraphe 1.1.6.3

qu'on n'a pas ici une simple association du langage car l'évocation du théorème est possible notamment par le fait d'avoir « vu » la configuration prototypique des diagonales du parallélogramme. C'est pourquoi nous admettrons qu'ici la **fonction d'association se réalise par l'action conjointe du mot étiquette « diagonales » et d'une configuration étiquette**

- De même, nous proposons l'extrait suivant, issu du protocole de Kévin / Jérémie (problème A1) :

64J : donc, <u>AE est perpendiculaire à OD</u> et on cherche à prouver que… bien, qu'ils se coupent en <u>milieu</u> quoi…
69J : il y a peut être un truc avec les vecteurs
………………
81. K : Le vecteur AO parce que le vecteur AD s'est fait au hasard …attends AC plus AD … tu te rappelles? <u>AD plus AC ça faisait deux AI et AI ça représentait quoi déjà?</u>
83. J : <u>AI c'était le milieu</u>
84. K : ouais c'était le milieu, et ça faisait deux AI donc…

L'appréhension opératoire de la **configuration des diagonales perpendiculaires d'un losange** et le **mot « milieu »** semblent jouer le rôle de **configuration étiquette** et de **mot étiquette** pour l'évocation du théorème sur la somme de vecteurs. C'est donc l'action conjointe de la configuration étiquette et du mot étiquette qui permet l'évocation du théorème.

1.1.5.1Comment s'exerce la fonction d'association du langage

La **fonction d'association** du langage est jouée par certains mots que nous qualifions de « mots étiquette ». Ils permettent d'associer à une représentation langagière d'un concept, certains référents théoriques et les propriétés qui leur sont associées dans la théorie.

Nous soulignons encore que la fonction d'association du langage est activée par l'effet de mots étiquette, mais, dans certains cas, par l'effet conjoint de configurations étiquette. La fonction d'association se réalise alors par la formulation ou la lecture d'un mot et par la reconnaissance visuelle d'une configuration particulière. Pour la suite, nous présenterons la définition détaillée de ces deux aspects : mot et configuration étiquettes.

1.1.5.2 Mots étiquette

Un mot joue le rôle « d'étiquette », s'il permet d'évoquer un concept appartenant au système de connaissances du sujet. Nous adopterons la notion de concept au sens de Vergnaud (1990).

Vergnaud définit le concept en tant qu' « un triplet de trois ensembles :

$C = (S, I, \Im)$

S : l'ensemble des situations qui donnent du sens au concept (la référence)

I : l'ensemble des invariants sur lesquels repose l'opérationalité des schèmes (le signifié)

> $\mathfrak{I}$: l'ensemble des formes langagières et non langagières qui permettent de représenter symboliquement le concept, ses propriétés, les situations et les procédures de traitement (le signifiant) » (Vergnaud, 1990, p.145)

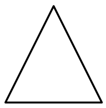
Le concept évoqué par le « mot étiquette » est alors un triplet constitué par le problème ou la situation proposée aux élèves, les invariants, c'est-à-dire les propriétés géométriques en jeu, le signifiant, c'est-à-dire les représentations langagières et graphiques du concept, par exemple le dessin relié au concept par le sujet qui résout.

Cette notion de concept nous permet d'aborder une question centrale : « Quelle est la différence entre un mot et un mot étiquette ? ».

La différence entre un *mot* et un *mot étiquette* est identifiable par le fait qu'un mot étiquette entraîne l'évocation de théorèmes et propriétés géométriques appartenant au système de connaissances du sujet et en cela constituants du signifié. Le théorème ou les propriétés évoquées seront fonctionnels à la résolution du problème ou à l'avancement de la résolution du problème

Ainsi, si l'on considère le mot « triangle », il peut déclencher une association avec un signifiant graphique, tel le dessin de la Fig. 1, mais cette association risque de s'arrêter au niveau figuratif dans la résolution du problème (problème 1) parce que ce problème ne fait pas appelle à des théorèmes généraux sur les triangles. C'est pourquoi nous ne considérons pas que le mot « triangle » a joué dans ce cas le rôle de mot étiquette. Par contre, si on considère le mot « triangle isocèle » il est possible qu'il évoque la représentation graphique de la Fig.1 en tant que signifiant, et qu'ensuite s'établisse un lien entre ce signifiant et les invariants, c'est-à-dire les propriétés relatives au triangle isocèle. Par exemple, le théorème : « la hauteur du triangle est aussi médiane et médiatrice » ou la définition d'un triangle isocèle « un triangle ayant deux côtés égaux est isocèle ». C'est pourquoi nous envisageons a priori un rôle d'étiquette au mot « triangle isocèle » plutôt qu'au seul mot « triangle ».

Fig. 1



Nous avons remarqué qu'un mot étiquette peut à la fois renvoyer au théorème pilote et à des autres mots. Par exemple, le mot « milieu » peut évoquer à la fois les mots « médiane » et « médiatrice » ainsi que le théorème sur la hauteur d'un triangle isocèle. Or, si l'évocation des mots « médiane » et « médiatrice », en tant que représentations langagières du concept (par exemple, du concept du *triangle isocèle*), permettent l'évocation d'un théorème pilote, alors nous considérons que le mot « milieu » fonctionne comme un mot étiquette. Par contre, si le mot « milieu » permet la seule évocation des mots « médiatrice » et « médiane » sans les relier à aucun théorème, alors sa verbalisation fonctionne juste comme association de mots (du concept, sera évoqué juste les représentations langagières et non langagières mais pas des invariants).

Maintenant, nous souhaitons répondre à une deuxième question qui nous apparaît centrale pour une analyse plus fine du rôle des mots étiquette :

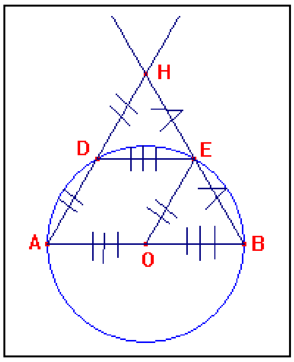
Quelles sont les relations entre les éléments constituant le concept évoqué par un mot étiquette?

On peut imaginer d'avoir des mots étiquette qui entraîneront, à l'intérieur du concept, des allers et retours entre invariants et signifiants : les propriétés géométriques prises en charge gèrent l'appréhension opératoire du dessin et la prise en charge de certaines configurations ou sous-configurations conduit ensuite à l'évocation de certains théorèmes (comme nous l'avons décrit lors de la définition des mécanismes au Chapitre II).

Mais, on peut aussi imaginer que les invariants de ce concept seront, à leur tour, reliés à un autre concept, dans le cas du triangle isocèle, par exemple, le concept de bissectrice. On verra en suit comment les deux concepts C_1 et C_2 peuvent être reliées. De même que pour le registre langagier, dans le registre figuratif certaines « configurations étiquette » permettent d'évoquer un concept. Dès que le concept vient évoqué il pourra être explicité éventuellement en termes d'invariants par les propriétés reliées au signifiant et au problème.

1.1.5.3 Configurations étiquette

Une configuration joue le rôle « d'étiquette » pour le sujet si elle entraîne l'évocation de théorèmes attachés au référent théorique associé à la configuration.



L'extrait suivant issu du protocole de Hana et Cristelle[13] (Problème A2) fournit un exemple de configuration étiquette :

57.C : j'ai une idée mais c'est un peu compliqué. En effet, si tu traces le triangle... si tu traces les droites (BE) et (AD) elles se coupent en H, ça me donne un triangle

…

60. H : quand on rejoint B et E

61. C : ouais, mais ça on l'avait déjà dit. Alors, ça me donne un triangle, en A...

62. H : un, deux, trois, quatre triangles..

63.C : on a des cotés parallèles là : DE est parallèle à AB d'accord? puisque DE est parallèle à AO et AB c'est le diamètre. Donc c'est DE est parallèle à AB. Donc, <u>tu connais la propriété dans un triangle</u> .... emmm .... donc ça c'est égal à ça, ça c'est égal à ça *(DE = AO = OB)* tiens, <u>je ne me souviens plus la propriété</u> !

64 Obs : <u>laquelle</u>?

65. C : <u>quand on a deux ... on a deux côtés parallèles dans un triangle ... deux droites</u>

[13] Le dessin de l'extrait est la reproduction du dessin issu du protocole de Hana et Cristelle

parallèles dans un triangle et qu'il y a des milieux sur un côté du triangle....
Je connais la réciproque mais il me manque...
66. Obs : est-ce que tu te souviens le nom?
67. C : non, mais c'est une propriété des milieux dans un triangle mais...
68. H : mais vas-y mets là la réciproque
69. C : dans un triangle... passe par le milieu d'un coté parallèle au troisième côté, passe par son milieu. Mais la réciproque...
l'élève écrit sur la feuille le théorème dont elle n'arrive pas à déterminer la réciproque
« dans un tri*(angle)* la droite qui passe par les milieux de » c'est ça, c'est :
« dans un triangle le segment qui passe par 2 cotés, et qui est parallèle au troisième côté et qui a pour longueur la moitié de celui-ci, coupe les deux 1ers cotés dans leur milieu »
70. H : Mais ça c'est ce qu'on avait déjà, ça c'est égal à ça (*DE = AO*)
71. C : pourquoi tu l'avais déjà?
72. H : mais parce que ça c'est un parallélogramme les deux… ces deux droites sont parallèles et DE est bien égal AO qui est le milieu de AB.
Silence
73. C : mais quand on a cette propriété après on peut dire l'inverse, c'est que quand dans un triangle deux droites sont... fin, une droite passant par les côtés d'un triangle qui est parallèle à un coté du triangle, passe par les milieux des deux cotés
74. H : donc..
75. C : donc ça serait égal à ça et ça à ça *(DH = AD et HE = EB)* mais je ne me souviens plus exactement la propriété

Nous pouvons raisonnablement penser que la configuration des côtés opposés et parallèles DE et AB conjointement à la configuration du triangle ABH, jouent le rôle de configurations étiquettes et ils permettent d'évoquer le théorème de Thalès en activant la fonction d'association du langage conjointement au mot « milieu » qui fonctionne alors comme étiquette. Cependant, dans l'extrait précédent, l'évocation du théorème n'est pas suivie par la verbalisation complète du théorème et cela parce que, à notre avis, les liens entre l'aspect figural et l'aspect théorique à la base de la conceptualisation du théorème n'ont pas étés construits de façon suffisaient forte.

Les résultats de l'analyse des protocoles montrent l'existence d'un risque dans l'usage des seules configurations car l'évocation du concept peut rester au niveau figuratif (la configuration évoque seulement le signifiant du concept) et ce risque est parfois plus élevé que lors de l'usage de mots étiquette. Il arrive alors que les invariants du concept ne sont pas explicitées.

L'importance des configurations en tant que « visual représentations », au sens d'images mentales, est reconnue par Fischbein (1987) dans son ouvrage «Intuition in science and mathematics ». Fischbein remarque le rôle considérable des représentations visuelles dans les activités créatives comme les sciences, les mathématiques, l'art etc. Il présente l'exemple fameus relatif à la création de la représentation moléculaire du benzène. Friedrich Kekule a

rêvé un serpent dans une position particulière qui lui a permis de représenter la structure hexagonale de la molécule du benzène. L'image mentale du serpent, est ce que nous interprétons comme un exemple curieux de configuration étiquette.
Il faut remarquer cependant une différence entre la configuration étiquette du serpent et celle utilisée par les élèves lors de la résolution du problème. En effet, si pour les élèves le concept qu'il faut évoquer par la configuration étiquette est déjà acquis, c'est-à-dire qu'il fait partie des leurs systèmes de connaissances, pour Kekule le concept était encore à construire. Cependant il est raisonnable de penser que la configuration du serpent évoquera toujours pour Kekule la représentation moléculaire du benzène.

L'idée des configurations étiquette semble être supportée des facteurs d'immédiateté que Fischbein (1987) associe à la cognition intuitive. Fischbein dit qu'il y a différents aspects d'immédiateté qui sont associés à la « cognition intuitive» mais ce que nous retenons ici est le seul aspect de la « visualisation ». Fischbein déclare que

> « visual representations are *not* by themselves intuitive knowledge. Visual images are an important factor in immediacy, but immediacy is not a sufficient condition for producing the specific structure of an intuitive cognition." (*ibid.* p. 103)

C'est justement sur la base de cette affirmation que nous croyons consistante l'idée de faire appel au concept au sens de Vergnaud. En interprétant l'idée de Fischbein dans le domaine de la géométrie euclidienne, nous croyons que « l'intuitive cognition » puisse être supportée non seulement par l'aspect des représentations visuelles, que nous appelons configurations, mais aussi par d'autres représentations, issues dans des systèmes sémiotiques différents (figuratif, de langage naturel…), des problèmes et des invariantes géométriques constituant du concept au sens de Vergnaud.
En outre, Fischbein affirme que la représentation visuelle permet l'organisation globale des informations :

> « Visual representations contribute to the organisation of information in synoptic representations and thus constitute an important factor of globalization. […] A <u>visual image</u> not only organizes the data at hand in meaningful structures but it <u>is also an important factor guiding the analytical development of a solution; visual representations are an essential anticipatory device</u>" (Fischbein 1987, pp. 103,104)

Nous interprétons l'idée du rôle de guide de l'image visuelle « visual image » dans le développement analytique du processus de résolution, comme une idée très proche du fonctionnement qui est à la base du « mécanisme dessin » défini comme modèle d'analyse dans le Chapitre III.

1.1.6 Conditions de fonctionnement des mots et des configurations en tant que mots et configurations étiquette

Le fait qu'on mot soit étiquette est dépendant de plusieurs facteurs qui relèvent de la situation, du contexte, des acteurs (locuteur et interlocuteur)…

1.1.6.1 Conditions de fonctionnement des mots et des configurations en tant que mots et configurations étiquette par rapport aux sujets

Pourquoi configurations et mots jouent le rôle d'étiquette pour certains mais pas pour d'autre ? Nous proposons de rechercher une des raisons de ce lien faible lors de l'apprentissage du concept. Si l'apprentissage du concept n'est pas structuré en tant que lien bidirectionnel entre l'aspect figural et les invariants théoriques, alors l'évocation du concept par une configuration étiquette sera susceptible d'être faible. Evidemment si l'apprentissage du concept se structure grâce au lien bidirectionnel entre aspect figural et aspect théorique, l'évocation du concept par une configuration étiquette sera susceptible d'être forte.

À cette étape, il nous semble possible de relier le concept de mot et configuration étiquette fortes ou faibles à l'idée de connaissances disponibles ou mobilisables issues de la théorie de Robert (1998). Nous pourrons dire qu'une connaissance peut ne pas être *disponible*[14] aux élèves lorsqu'elle reste *mobilisable* au niveau du signifiant mais non au niveau des invariants.

Par exemple, considérons l'extrait suivant (problème B1) :

9 G: ça est égal ça (*en indiquant AO et AD)* ça c'est un parallélogramme AO égal OE égal AD donc ça fait un parallélogramme 10 C: mais un parallélogramme c'est pas les cotés de la même longueur, c'est les cotés opposés qui sont…. **11 G**: ouais, ouais, tu as raison …….c'est un **losange** **12 C**: ouais, ouais, pour un **losang**e il faut dire que les diagonales se coupent dans leur milieu et ils sont perpendiculaires

Le mot « losange » prononcé à l'intervention [11] et aussi à l'intervention [12] du protocole de Camille et Gaëlle, relèvent de l'objet du problème pour Gaëlle, issu par l'appréhension

---

[14] Précisons les niveaux de mises en fonctionnement des connaissances par les élèves, relativement à un niveau scolaire donné (Robert, 1988, pp. 165-168).

Le *niveau technique* : il implique la mise en fonctionnement d'une connaissance dans des contextualisations simples, locales, sans travail préliminaire de reconnaissance, sans adaptations. C'est le niveau des applications *immédiates.*

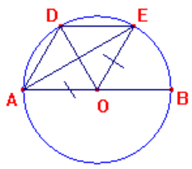
Le niveau mobilisable : il implique la mise en fonctionnement d'une connaissance par un début de juxtaposition de savoirs. Ce sont des applications où il faut adapter ses connaissances au contexte particulier. Par exemple par un changement de point de vue ou de cadre mais avec indications (soit données par l'enseignent soit par l'énoncé)

Le *niveau des connaissances disponibles* : ce niveau correspond au fait de savoir résoudre ce qui est proposé sans indications, d'aller chercher soi-même dans ce connaissances ce qui peut intervenir perceptive du dessin, et d'un objet géométrique[15] issu de l'évocation du théorème pour Camille. Ainsi, comme dans le premier cas le mot « losange » reste associé au seul aspect figural, ne recouvre pas un rôle d'étiquette, tandis que dans le deuxième cas le mot « losange » fonctionne comme un mot étiquette car il a été évoqué à partir de l'aspect figural et suscite la verbalisation d'un théorème qui sera dans ce cas un théorème pilote.

Un mot est étiquette non seulement parce qu'il a une fonction d'association, mais aussi parce qu'il est fonctionnel dans la résolution du problème, c'est-à-dire qu'il permet d'évoquer un théorème fonctionnel respect à la résolution.

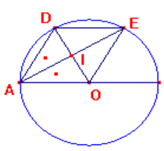
1.1.6.2 Mots/Configurations étiquette face aux rapports institutionnels

Un autre résultat de notre recherche concerne le rapport entre mots étiquette, configurations étiquette et les savoirs objets d'enseignement. Nous avons observé que les mêmes configurations peuvent jouer le rôle d'étiquette ou de simple configuration, selon



qu'elles participent d'un processus de résolution produit par des élèves italiens ou français. Par exemple, la configuration par laquelle on isole les segments AO et OE et la relation d'égalité entre eux, permet d'isoler, en Italie la sous-configuration d'un triangle isocèle AOE, et donc mobilise le concept de triangle isocèle avec ses propriétés, tandis qu'en France elle permet d'isoler la sous configuration relative à la symétrie des deux points A et E par rapport à l'axe OD et le théorème correspondant (par exemple, le théorème sur la somme des vecteurs).

La sous-configuration des diagonales perpendiculaires d'un quadrilatère (quadrilatère très semblable au parallélogramme), conjointement au mot milieu, fonctionnent respectivement comme configuration et mot étiquette pour évoquer le théorème à propos de la somme de vecteurs,[16] comme le montre l'extrait ci-dessous issu du protocole de Kévin et Jérémie (problème A1).



64. J : donc, AE est perpendiculaire à OD et on cherche à prouver que bien que se coupent en milieu quoi

…66. J : il y a peut être un truc avec les vecteurs

La combinaison de ce mot particulier et de cette configuration particulière fonctionnent comme étiquette pour l'évocation du théorème sur la somme de vecteurs mais, de même, ils peuvent jouer le rôle d'étiquettes pour l'évocation du théorème T1 « un quadrilatère ayant les diagonales perpendiculaire et qui se coupent dans leur milieu est un losange ». Or, si le théorème T1 a beaucoup de chances d'être évoqué soit en Italie qu'en France, le théorème sur la somme de vecteurs a plus de chances d'être évoqué en France par

15 L' analyse de ce protocole a été développée de façon détaillée au Chapitre V de cette thèse.
16 Pour une analyse détaillée du protocole de Kévin et Jérémie nous renvoyons aux annexes.

rapport à l'Italie car le programme scolaire italien ne comporte pas les vecteurs avant la classe de première.

Ou encore, la sous-configuration d'un triangle rectangle est plus souvent étiquette en Italie qu'en France car en Italie les critères d'isométrie des triangles sont très utilisés (la présence d'un triangle rectangle est très « commode ») tandis qu'en France sont plus utilisées les symétries car la géométrie enseignée au collège se base sur les transformations (et au lycée au moment de notre expérimentation).

Il ressort de ce qu'on vient de dire, que le fonctionnement d'un mot en termes de mot étiquette ou d'une configuration en termes de configurations étiquette, dépend fortement, entre autres choses, du programme scolaire ou encore des rapports institutionnels aux savoirs.

La possibilité de jouer le rôle d'étiquette par un mot dépend aussi du niveau scolaire auquel ce mot est utilisé. Par exemple, le mot « losange » peut jouer le rôle d'étiquette en classe de Quatrième, car il suscite l'évocation de théorèmes qui lui sont liés, mais difficilement il sera étiquette à la fin de l'école primaire, car le programme scolaire de ce niveau ne comporte pas des théorèmes sur le losange utiles pour la résolution des problèmes proposées dans notre expérimentation. Le caractère étiquette du mot est relatif aussi au contenu du programme scolaire et notre expérimentation donne lieu à des variations de ce paramètre puisque nous avons choisi de le conduire à la fois dans des classes italiennes et dans des classes françaises. **Or, l'analyse des protocoles n'a pas mis en évidence de mots qui puissent jouer le rôle d'étiquette pour les seules classes italiennes ou pour les seules classes françaises. Au contraire, nous avons remarqué qu'en général, les mots jouant le rôle d'étiquette dans le contexte italien, le jouent aussi pour le contexte français mais souvent ces mots déclenchent des théorèmes différents[17].** Par exemple, dans la plupart des cas, le mot « équilatéral » a permis d'évoquer, en Italie, les théorèmes : « un triangle équilatéral a tous les angles de 60° » et « dans un triangle équilatéral on peut isoler deux triangles rectangles ayant les angles de 60°, 30° et 90° ». Le même mot « équilatéral », a plus de chances en France d'évoquer le théorème « dans un triangle équilatéral la hauteur est aussi médiane et médiatrice ». À partir de cette considération, nous avons ressenti l'exigence de rassembler les mots principaux et les principales configurations ayant un rôle d'étiquette (cf. tableau ci-dessous). En outre, nous avons associé aux seuls mots étiquette, aux seules configurations

[17] Il faut quand même souligner que ce résultat est issu d'une situation très restreinte dérivant des choix faites lors de l'expérimentation. Par exemple, le fait que les problèmes concernent de la géométrie plane ou le fait que nous avons proposé les mêmes problèmes à résoudre dans les deux pays, peut favoriser le rôle d'étiquette pour les mêmes mots.

étiquette ou encore à l'action combinée des deux, les théorèmes qu'ils ont permis d'évoquer au cours des processus de résolution.

Tableau 6.3

Les mots en grisé, sont les mots étiquette qui permettent d'évoquer un théorème sans l'action conjointe d'une configuration étiquette. Les mots en noir sont les mots étiquette qui ont évoqué un théorème avec l'action conjointe d'une configuration étiquette. La marque « F » indique France, la marque « I » indique Italie

Mot étiquette	Configuration étiquette	Théorème évoqué	
Isocèle Isocèle Isocèle et Isocèle et	→ → Deux triangles rectangles → Configuration → prototypique du triangle équilatéral par ajout d'un troisième codage sur un des côtés du triangle	Hauteur=médiane=médiatrice Définition : un triangle ayant deux côtés égaux est un triangle isocèle Critères d'isométrie des triangles Définition: le triangle ayant trois côtés égaux est équilatéral	F, I F, I I F, I
équilatéral et équilatéral et	Deux triangles rectangles particuliers → →	Critères d'isométrie des triangles Hauteur=médiane=médiatrice	I F, I
Milieu, médiatrice et Milieu, médiatrice et Milieu et	Diagonales perpendiculaires → Diagonales perpendiculaires → Hauteur du triangle isocèle →	Un quadrilatère ayant les diagonales perpendiculaires qui se coupent dans leur milieu est un losange Application du théorème « Somme de vecteurs » L'hauteur d'un triangle isocèle est aussi médiane et médiatrice	F, I F F, I
Bissectrice et	Diagonales perpendiculaires →	La bissectrice du sommet d'un triangle isocèle est aussi médiane	F, I
Perpendiculaire et	Triangles rectangles →	Critères d'isométrie des triangles	I
deux côtés opposés égaux et	Quadrilatère OADE →	Un quadrilatère ayant deux côtés opposés égaux et parallèles est un parallélogramme	F, I
	Trois cotés égaux du quadrilatère OADE	Un quadrilatère ayant quatre côtés égaux est un losange	F, I

	quadrilatère OADE →	égaux est un losange	

En résumé, les configurations peuvent être étiquette dans un seul de deux pays et cela signale qu'il n'y a pas une signification intrinsèque dans les configurations. En outre, si, en général, certaines configurations peuvent être étiquettes dans un seul des deux pays, le plus souvent les mots recouvrant le rôle d'étiquette les sont à la fois en Italie et en France, mais ils sont susceptibles de déclencher des théorèmes différents. Bien évidemment, les mots qui ont joué un rôle d'étiquette, tels milieu, isocèle… ne remplissent pas toujours cette fonction. On peut même ajouter que la plupart du temps ils ne fonctionnent pas en étiquette. Nous reviendrons sur cette question au paragraphe suivant.

Dans ce qui suit, nous présenterons le Tableau 6.4 comme dispositif pour avoir un point de vue plus globale sur le lien entre les théorèmes évoqués et les rapports institutionnels au savoir. Ainsi, nous présenterons le pourcentage des élèves français et des élèves italiens qui ont évoqué ces théorèmes et le pourcentage total des binômes qui ont évoqué chaque théorème.
Ce tableau permettra de fournir aussi des résultats à propos d'une question avancée au chapitre IV. Nous aborderons ainsi la comparaison entre l'ensemble des théorèmes évocables pour la résolution des problèmes (cf. Tableau 4.2, chapitre IV) et l'ensemble des théorèmes effectivement évoqués par les élèves lors des processus de résolution.

Tableau 6.4[18]

Les théorèmes 1÷5 sont théorèmes pilote car ils permettent d'aboutir à la réponse du problème. Les autres théorèmes recueillis dans le tableau peuvent être pilote ou non-pilote selon les cas. Le grisé signale que le binôme a produit la réponde à l'aide de l'expérimentateur ou alors que le théorème n'a jamais été utilisé même si l'on avait prévu a priori dans le Tableau 4.2

Théorèmes évoqués	Nombre de binômes/ nombre total des binômes	Binômes italiens (9)	Binômes français (5)	Problèmes
1.Un quadrilatère ayant les diagonales qui se coupent dans leur milieu et perpendiculairement est un losange	5/14	V/D E/B	O/D K/J C/G	B1, A1
2.Un quadrilatère ayant quatre côtés égaux est un losange	6/14	V/D E/A E/B L/A	O/D K/J	A1, B1, B2, A2
3.Un parallélogramme ayant deux côtés consécutifs égaux est un losange	2/14	L/E L/A		B2
4.Un parallélogramme ayant quatre côtés égaux est un losange	3/14	E/A	T/S H/C	B1, A2
5.Un parallélogramme ayant une des diagonales bissectrice de l'angle au sommet, est un losange	0/14			
1'. Un parallélogramme ayant les diagonales perpendiculaires est un losange	1/14	E/A		B1
6. (Définition) Un triangle ayant deux côtés égaux est un triangle isocèle	7/14	E/B E/A V/D	O/D T/S K/J C/G	A1, B1,
7. Dans un triangle isocèle, la hauteur est confondue avec la médiane et la médiatrice		E/B	O/D, C/G, K/J	A1, B1
7'.Si dans un triangle la hauteur est confondue avec la médiane et la médiatrice, le triangle est isocèle.			O/D	A1
8. (Définition) Un triangle ayant trois côtés	4/14	E/A V/D	T/S K/J	B1, A1

[18] Remarquons que parmi les binômes italiens qui participent à l'expérimentation, ceux qui n'apparaissent pas dans ce tableau sont au nombre de quatre et cela parce qu'ils utilisent la géométrie analytique pour résoudre le problème.

égaux est un triangle équilatéral				
9.Un triangle équilatéral a tous les angles de 60°	3/14	E/A E/B	K/J	B1,A1
10.Dans un triangle équilatéral on peut isoler deux triangles rectangles ayant les angles de 90°, 60° et 30°.	2/14	E/A E/B		B1, A1
11.Deux point ayant la même distance d'un axe sont symétriques par rapport à cet axe	1/14		O/D	A1
12. Les rayons du cercle ont tous la même longueur	10/14	E/B E/A V/D L/A L/E	O/D T/S H/C K/J C/G	A1, B1, B2, A2,
13.Si la médiane, la hauteur et la médiatrice d'un triangle sont confondues alors le triangle est isocèle	1/14		O/D	A1
13'. Dans un triangle isocèle, la hauteur est aussi médiane et médiatrice	5/14	E/A	O/D T/S K/J C/G	A1, B1
14.Les critères d'isométrie des triangles	3/14	E/A E/B V/D		A1, B1
15.Un quadrilatère ayant les diagonales qui se coupent dans leur milieu est un parallélogramme	2/14	E/A L/A		B1, B2
16.Un quadrilatère ayant deux côtés égaux et parallèles est un parallélogramme	3/14	L/A	O/D T/S	A1, B1, B2
17.Deux droites coupées par une transversale sont parallèles si et seulement si les angles alternes internes sont égaux.	1/14	E/B		A1
18.Un triangle inscrit dans un demi-cercle est un triangle rectangle	3/14	V/D	C/G T/S	B1
19.Somme de vecteurs	1/14		K/J	A1
20.La somme des angle internes d'un triangle est de 180°	1/14		K/J	A1

Ce tableau montre l'existence de théorèmes pilote préférés par les élèves de l'un des pays soit parce qu'il joue un rôle important dans l'enseignement soit parce qu'il est l'application moins coûteuse en raison de l'existence d'autres théorèmes du curriculum.

Le Tableau 6.4 permet de comparer l'ensemble des théorèmes prévus a priori comme évocables lors du processus de résolution à l'ensemble des théorèmes qui ont été effectivement évoqués lors du processus. Cette comparaison a été envisagée au chapitre IV. Nous remarquons que les théorèmes utilisés par les élèves qui n'ont pas été prévus a priori sont au nombre de trois : le théorème [4], le théorème [19], le théorème [20]. L'ensemble des théorèmes évocables a priori et l'ensemble des théorèmes effectivement évoqués par les élèves lors des processus de résolution sont presque les mêmes. Cela nous autorise à penser que les liens entre appréhension opératoire et référents théoriques sont « forts » chez les élèves, car l'ensemble des théorèmes évocables au Tableau 4.2 a été construit à partir de toutes les appréhensions opératoires possibles sur le dessin. Mais nous pouvons remarquer aussi que la plupart des théorèmes sont évoqués lors de la résolution des problèmes 1 et cela confirme ce que nous avons avancé a priori : la version 1 du problème est plus riche en sous-configurations et donc en théorèmes évocables que la version 2 du problème. Cela semble dû au fait que le problème 2 est résolu par les élèves qu'en prennent en charge la seule sous-configuration du quadrilatère OADE donc au moyen d'une seule stratégie de solution possible

1.1.6.3 Conditions de fonctionnement des mots en tant que mots étiquette par rapport au processus de résolution

Les mots qui ont joué le rôle d'étiquette ne remplissent pas toujours cette fonction. C'est pourquoi nous essayerons de mettre en évidence les conditions de fonctionnement des mots en tant que mots étiquette. L'analyse des protocoles a mis en évidence que, souvent, le mot jouant le rôle d'étiquette, appartenant à une liste d'informations recueillies au moyen de l'appréhension opératoire du dessin ou d'inférences. Plus en général, ce mot relève d'une expansion discursive d'accumulation. Dans ce cas, nous avons observé que les élèves ont besoin d'une certaine « masse » d'informations pour évoquer le théorème pilote et organiser ainsi le processus de déduction. En effet, souvent le théorème pilote évoqué prend en compte les informations de la liste comme prémisses. Le mot étiquette fonctionne donc comme une sorte de pont entre la liste d'informations et le théorème évoqué. Donc, le fait d'appartenir à une liste d'informations dont certaines assumeront le statut de prémisse du théorème pilote, semble être une autre condition pour qu'un mot puisse jouer le rôle d'étiquette.

Par exemple, dans l'extrait suivant, issu du protocole de Kévin et Jérémie (Problème A1), essayons de montrer les conditions qui font jouer au mot « milieu » le rôle d'étiquette :

34. J : déjà il y a les diagonales qui se coupent dans leur **milieu** et qui sont perpendiculaires
35. K : t'es sure qui se coupent dans leur **milieu**?
36. J : non, ça faudrait prouver ça, mais perpendiculaires ça c'est sûr !
37. K : donc t'as fait bissectrices ou médiatrices?
38. J : médiatrices, bissectrices ça coupe l'angle en deux fins, moi…
39. K : si tu as fait médiatrice, dans ce cas là c'est sur qui se coupent dans leur **milieu**
40. J : ouais, l'angle il le coupe au **milieu** quand même, mais bon, …………
Alors, démontrer que c'est un losange…;
41. K : [---] c'est un parallélogramme, je croyais que c'est un parallélogramme
42. J : les cotés opposés sont parallèles, et ça c'est un rayon *(OE)*
On sait que c'est un parallélogramme, il faut prouver que c'est un losange justement, c'est un parallélogramme spécial. Bon alors, pour prouver que ces cotés sont parallèles …
Ben AD égal AO, AO c'est le rayon et EO c'est un rayon du cercle donc forcement AD il est parallèle
43. K: pourquoi forcement ?
44. J : ben, non égal égal
45. K : **si les diagonales sont perpendiculaires et elles se coupent dans leur milieu c'est un losange**
46. J : En tout cas, on sait que AD est égal à OE parce qu'on sait …
47.K : mais tu n'as pas besoin de prouver que c'est un parallélogramme, tu dis que c'est **un quadrilatère dont les diagonales se coupent dans leur milieu et elles sont perpendiculaires, et c'est un losange**

Le mot « milieu » revient souvent mais il prend le rôle d'étiquette lorsqu'il est associé à la configuration étiquette[19] des diagonales perpendiculaires (intervention [45]). Le mot, donc, fonctionne comme étiquette lorsqu'il appartient à une liste d'informations suffisamment riche qui permet de générer relations géométriques et, en particulier, d'évoquer le théorème pilote « un quadrilatère ayant les diagonales perpendiculaires qui se coupent dans leur milieu est un losange ». Certaines des informations de la liste sont liées aux prémisses du théorème : la perpendicularité des diagonales est directement tirée des données du problème, tandis que la prémisse « les diagonales se coupent dans leur milieu » semble être tirée de l'information « médiatrice » (par rapport au segment AE) et de la configuration du parallélogramme.

1.1.6.4 Fonctionnement inhabituel de mots étiquette

70. K : ouais, ha ouais !, on c'est que c'est AE c'est forcément le milieu de OD dès qu'on a tracé la bissectrice et que <u>la bissectrice coupe le segment en son milieu</u>
71. J : <u>non, la médiatrice</u> !
72. K : la médiatrice ça coupe le segment en son milieu et perpendiculairement…

L'analyse des protocoles met en évidence qu'il y a des opérations de base, comme celui de partager en deux parties égales l'objet géométrique (pour obtenir deux parties de même longueur ou de même mesure) qui appellent des étiquettes différentes (voir médiane,

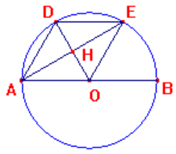
[19] Pour une analyse détaillée de ce point, nous renvoyons aux annexes.

médiatrice ou bissectrice). Toute étiquette est référée à un objet différent (la bissectrice à l'angle, la médiane au segment) mais l'action qu'on fait sur l'objet est de la même nature, qu'il soit un angle ou un segment : on le partage en deux parties. De là, la difficulté des élèves à repérer l'étiquette correcte (ils appellent bissectrice ce qu'utilisent comme médiane). Alors, le rôle d'étiquette est assumé par l'opération qu'ils utilisent (partager en deux) et non plus par l'objet géométrique sur lequel l'opération agit.
Par exemple, le mot étiquette « triangle isocèle » appelle certains invariants, tels la propriété que la hauteur est aussi médiane, médiatrice et bissectrice de l'angle au sommet. Les élèves utilisent indifféremment le concept le mot de médiane, de médiatrice ou de bissectrice en passant par le trait commun de leur définition : l'opération de partager en deux parties égales. Mais, comme dit ci-dessus, l'opération de partager en deux parties égales n'est pas mise en relation aux objets « segment » et « angle », les élèves appellent bissectrice ce qui est utilisé comme médiane ou médiatrice.
L'analyse des protocoles, comme on vient de le dire, fournit des exemples d'erreur dans l'évocation des propriétés d'un concept par les mots étiquette car l'objet auquel elles s'adressent n'est pas explicite.

1.1.7 Conditions de fonctionnement de la fonction d'association du langage

Compte tenu du fait que la fonction d'association du langage permet d'évoquer un référent théorique, voire un théorème ou une propriété géométrique, nous avons eu l'impression qu'il faut un minimum de propriétés pour que ce référent théorique soit évoqué. C'est pourquoi, l'évocation du théorème par l'effet d'un mot étiquette peut être conjointe à l'effet d'un certain ensemble de propriétés exprimées en termes géométriques.
Par exemple, en considérant les deux théorèmes : « un quadrilatère ayant les diagonales qui se coupent dans leur milieu et perpendiculairement est un losange » et « un quadrilatère ayant quatre côtés égaux est un losange » et en considérant qu'en France, le deuxième d'entre eux n'a pas été presque utilisé pour résoudre le problème (A), cela nous conduit à penser que les élèves n'avaient pas le minimum des propriétés pour appliquer le théorème. Pour approfondir cette question, nous avons essayé d'associer la recherche des propriétés qui précèdent l'évocation d'un théorème conjointement au fait que ce théorème soit ou non utilisé au cours du processus de résolution. Nous souhaitions ainsi mettre en évidence un ensemble minimal des propriétés qui permettent d'utiliser le théorème évoqué.
Mais, l'analyse ainsi conduite nous conduit à des résultats inattendus. En effet, nous avons eu l'impression que les élèves choisissent d'appliquer un théorème plutôt qu'un autre, non pour le fait qu'ils ont évoqué un ensemble suffisant de propriétés, mais pour le fait que ce théorème

est moins « coûteux » à démontrer. Le coût d'application d'un théorème est lié aux connaissances préalables des élèves et à leurs habitudes et non au seul problème, c'est pourquoi le même problème ne conduit pas au même comportement chez les élèves des deux pays. Par exemple, dans le problème A1 ou B1, le théorème « Un quadrilatère ayant quatre



cotés égaux est un losange » est facilement utilisable en passant par l'isométrie des triangles AOH, HAD, DHE, EHO, mais il n'est pas ainsi facilement en passant par les transformations. **Une solution est économique ou elle n'est pas économique non seulement par rapport au problème choisi, mais aussi par rapport au sujet qui résout le problème. De ce point de vue notre perspective d'analyse est plutôt adressée aux rapports institutionnels au sujet.**

1.2 Interrelations entre les différentes fonctions du langage

Le langage peut être un outil de résolution et cela passe par des différents moyens de fonctionnement que nous avons qualifiés en tant que fonctions du langage. Ces fonctions ne sont pas complètement indépendantes mais il y a des relations entre elles. Loin d'être des relations bidirectionnelles, les liens entre les fonctions agissent comme des sortes de ponts qui donnent du sens à chaque fonction. C'est justement l'action conjointe de certaines fonctions du langage, telles la fonction de guide, de planification et de contrôle, qui fait évoluer le processus de résolution. Malgré cela, nous ne pouvons pas exclure que d'autres fonctions pussent agir de façon plus indépendante, mais nous n'analyserons ici que la dépendance parmi les fonctions.

1.2.1 Interrelations entre les fonctions de guide, de planification et de contrôle du langage.

Un élément commun de ces fonctions est la verbalisation de l'énoncé d'un théorème ou d'une définition. Cette verbalisation est un révélateur de ces fonctions et conjointement constitue une des conditions pour leur fonctionnement.

La même action de verbalisation relève de trois fonctions différentes et cela dépende du moment de l'action : en général, la verbalisation au début du processus de résolution (ou d'un pas de déduction) exerce une fonction de guide, la verbalisation des prémisses du théorème tout au cours du processus exerce une fonction de planification, tandis que la verbalisation à la fin du processus de résolution (ou du pas de déduction) joue un rôle d'une fonction de contrôle lorsqu'une première verbalisation du même référent théorique a été faite au début du processus.

En général, l'analyse des protocoles a mis en évidence que la fonction de planification du langage suit la mise en œuvre d'une fonction de guide du langage[20]. En cas contraire, le projet perd sa consistance devenant beaucoup plus proche de la liste d'informations que d'un projet d'enchaînement de pas de déduction car les prémisses retenues par la planification ne sont pas nécessairement celles d'un théorème pilote.

De là nous pouvons en tirer que le degré d'importance de la fonction de planification est toujours mineur ou égal au degré d'importance de la fonction de guide, comme le montre le tableau suivant (cf. tableau au paragraphe 1.1.1.3)

Problèmes A et B	**Fonction de guide**	**Fonction de planification**
Camille/ Gaëlle A1	5/84	3/84
Kévin / Jérémie A1	11/175	6/175
Vito /Davide B1	2/77 (V) ; 4/77 (D)	2/77 (V) ; 4/77 (D)
Alessandra/Elena B1	1/56	1/56

1.2.2 Interrelations entre la fonction référentielle et la fonction d'association du langage

L'analyse montre aussi un lien entre la fonction référentielle et la fonction d'association du langage agissant par un mot étiquette.

Par exemple, nous observons que le mot « losange » présent dans les interventions [11] et [12] du protocole de Camille et Gaëlle[21], fonctionne en tant que mot étiquette lorsque il contribue à évoquer le théorème lié au « losange » (intervention [12]), tandis que le même mot, ne déclenchant pas l'évocation d'un théorème en [11], ne fonctionnera pas comme mot étiquette. La fonction référentielle agit dans ce cas au moyen de l'opération de catégorisation permettant de désigner l'objet « quadrilatère » par une des classes typiques géométriques auxquelles il appartient : le « losange ». Le mot « losange » est donc associé ici à l'objet géométrique. De là, l'évocation du théorème est déclenchée par la fonction d'association du langage. Donc la fonction d'association du langage s'exerce lorsque la fonction référentielle permet au langage de désigner objets théoriques.

[20] Dans les processus analysés, les projets ont été toujours accompagnés par le guidage du langage

[21] 11 G: ouais, ouais, tu as raison …….c'est un **losange**
12 C: ouais, ouais, pour un **losang**e il faut dire que les diagonales se coupent dans leur milieu et ils sont perpendiculaires

1.3 Changement de cadre

Dans certains processus de résolution, nous avons remarqué le recours au changement de cadres pour aboutir à la solution. Par exemple, dans le protocole de Kévin et Jérémie (problème A1) les élèves passent du cadre euclidien au cadre vectoriel, tandis que dans le protocole de Elena et Luca (problème 3) les élèves passent du cadre euclidien au cadre de la géométrie analytique.

Les protocoles où l'on reconnaît ce type d'interprétation du problème ne sont pas nombreux mais présentent, à notre avis, un phénomène très intéressant.

Pour aborder l'étude de ce phénomène, nous souhaitons tout d'abord répondre aux questions suivantes :

Pourquoi un changement de cadres apparaît-il comme aide à l'avancement du processus de résolution à ces élèves ?

Comment s'exerce un changement de cadres ?

Nous essayerons de répondre aux questions posées à partir de deux points de vue : le point de vue didactique, en adoptant les notions de cadre et de changement de cadres fournies par Douady (1986), et le point de vue linguistique en adoptant la notion de changement de référent conversationnel fourni par Van Dijk (1980). Ainsi, la théorie de Douady nous aidera à comprendre pourquoi, dans ces processus, un changement de cadres est utile, alors que la théorie de Van Dijk nous aidera à comprendre comment ce changement s'exerce.

Douady affirme « **qu'un *cadre* est constitué des objets d'une branche des mathématiques, des relations entre les objets, de leurs formulations éventuellement diverses et des images mentales associées à ces objets et ces relations**. » (R. Douady, 1986, p. 11).

Bien que Douady ne spécifie pas la notion d'« image mentale », cette idée semble bien s'adapter aussi bien à la notion de configuration étiquette qu'à celle de mot étiquette en tant que représentations langagières et non langagières d'un concept. Par exemple, l'image mentale dont parle Douady peut être vue comme la configuration étiquette des côtés OA et AD du parallélogramme OADE et de sa diagonale AE qui représentent la configuration associée au théorème de la somme des vecteurs.

Cependant, il est vraisemblable de penser que les images mentales dont parle Douady, sont proches des « figural concept » de Fischbein: « mental entities, […],which reflect spatial properties (shape, position, magnitude), and, at the same times, posses conceptual qualities - like ideality, abstractness, generality, perfection. » (Fischbein E., 1993, p.143)

Douady conçoit la notion de cadre comme une notion dynamique, c'est pourquoi « le *changement de cadres* est un moyen d'obtenir des formulations différentes d'un problème qui, sans être nécessairement tout à fait équivalentes, permettent une nouvelle approche du problème et la mise en œuvre d'outils et techniques qui ne s'imposaient pas dans la première formulation » (Douady, 1986, p. 11). C'est à l'aide de ces formulations différentes dans des cadres différents que les élèves peuvent arriver à aboutir à la solution du problème.

Ces formulations permettent de dépasser les difficultés rencontrées dans le cadre de la géométrie euclidienne. Alors, reformuler le problème en termes de vecteurs ou en termes analytiques, semble permettre au binôme Kévin /Jérémie de répondre à la question (prouver que OD coupe AE en le milieu) et au binôme Luca / Elena de répondre à la question (les points D, B et E sont alignés) à l'aide des techniques et des outils qui permettent de mettre en jeu des connaissances disponibles aux binômes.

Une réponse à la première question peut alors être envisagée : le changement des cadres permet d'aborder les difficultés de résolution du problème d'une différente manière, voire au moyen des techniques et outils différents, car ils constituent, pour les élèves, des connaissances disponibles par rapport au problème. En d'autres termes, si le cadre euclidien ne fournit pas aux élèves des connaissances disponibles par rapport au problème, le cadre vectoriel ou analytique semble le faire.

Mais comment les élèves choisissent-ils le cadre où déplacer le processus de résolution ? Pour répondre à cette question, nous nous appuyons sur l'analyse linguistique de Van Dijk centrée sur ce qu'il appelle « référent conversationnel » et sur l'élément clé qu'il appelle « concept commun ». Les concepts communs dans les protocoles de K/J et E/A, comme on verra en suite, sont respectivement le « milieu » et « les angles droits en B » qui fonctionnent comme pivot pour le passage d'un cadre à l'autre.

Van Dijk. admet que

> « dans un certain contexte les référents de la conversation peuvent être issus d'un autre […]. Au niveau formel on admet que ce changement est possible seulement s'il y a au moins un concept (exprimé dans le discours) appartenant aux deux environnements (propositionnels) définis par les référents de conversation »[22] (Van Dijk, 1980, pp. 82, 83).

Même si Van Dijk considère comme objet de son analyse une « conversation », donc une forme d'échange communicatif liée strictement à l'oral et appartenant à un contexte qui ne

[22] « […] si può dire che gli argomenti di conversazione sono ORIGINABILI da un altro argomento di conversazione in un certo contesto[…]. A livello formale si può assumere che tale cambiamento è possibile solo se vi è almeno un **concetto** (individuale-di proprietà o anche preposizionale) che appartiene a entrambe le sfere determinate dai due argomenti di conversazione."

relève pas d'un domaine spécifique comme celui des mathématiques, nous retenons sa condition pour le changement du référent conversationnel comme essentielle. Dans un contexte spécifique comme celui de la géométrie, le concept commun, condition essentielle pour le changement du référent, qui est pour nous le changement de cadre, sera un concept de type mathématique, voire géométrique. Dans le cas de l'extrait du binôme Kévin et Jérémie, le concept commun est le « milieu » qui permet le changement de référent : d'un référent géométrique, au référent vectoriel. Dans le cas de l'extrait de Elena et Luca, le concept commun est « les angles droits en B » associés respectivement à deux triangles rectangles en géométrie euclidienne, ou à l'origine d'un repère cartésien dans la géométrie analytique.

Une réponse à la deuxième question semble pouvoir être avancée : le changement des cadres est semble être provoqué par un processus analogue au changement de référent conversationnel de Van Dijk : ainsi la présence d'un mot commun à deux cadres ou d'une configuration commune aux deux cadres semble être une condition pour que s'effectue ce changement.

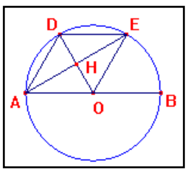
1.4 Modèles d'actions

L'analyse des processus de résolution à l'aide des Démarches de résolution et Mécanismes, nous a permis de repérer certaines régularités dans les comportements verbaux des élèves que nous qualifions « modèles d'action ». Comme on le verra dans la suite, ces modèles, concernant des modes de progression du discours afin de construire un processus déductif de résolution, sont liés aux modes d'expansion discursive définis au Chapitre II. Les modèles d'action que nous décrirons dans la suite sont : le modèle liste, le modèle final et le modèle hypothético-déductif.

1.4.1 Modèle d'action « Liste »

Le modèle d'action *Liste* est essentiellement caractérisé comme la « création d'un univers de travail » au moyen d'un recueil d'informations. Dès que la liste contenant ces informations dévient longue un traitement de cette liste s'impose.

Si la constitution d'une liste consiste essentiellement en la recherche et le regroupement des informations, le traitement de la liste consiste quant à lui en l'organisation des informations recueillies. Un exemple de liste est fourni par l'extrait suivant, issu du protocole du binôme Taina et Sophie (problème B1):



40. T : les diagonales AE et OD se coupent dans leur milieu en formant un angle droit et AO égale OE, OE égale AD.
41. S : t'as DO, c'est aussi un rayon du cercle

Nous pouvons reconnaître les informations constituant de la liste :

1. les diagonales AE et OD se coupent dans leur milieu
2. les diagonales AE et OD forment un angle droit
3. AO égal OE
4. OE égal AD
5. DO rayon du cercle

La liste consiste donc en la juxtaposition d'informations que nous reconnaissons par leur forme langagière : il s'agit de **la juxtaposition de propositions indépendantes**. Par exemple, l'intervention suivante montre une liste de trois informations exprimées par trois propositions indépendantes

E : OA est un rayon du cercle, OE est un rayon du cercle, AD est égal à AO car il est donné

P1 P2 P3

P1, P2, P3 propositions indépendantes

En général, parmi les critères permettant de reconnaître une liste nous retenons :

- la juxtaposition de propositions indépendantes liées par des conjonctions telles : « et, après, en outre, puis… » ou par des phrases telles : « on sait que… et… »
- la présence de verbes renvoyant à la perception tels « voir, regarder… »
- la présence dominante du temps verbal au présent indicatif
- la présence d'adverbes temporels tels : « puis, après ça… » qui donnent un ordre temporel à la séquence des informations de la liste
- la présence de mots utilisés en déictique ou d'adverbes déictiques tel « ici, là, là bas… » ou encore « ça, celui-là… » souvent accompagnés par des gestes
- la présence des modalités « falloir, devoir… » au conditionnel
- la présence d'inférences qui ne sont pas justifiées, souvent issues de l'appréhension perceptive du dessin. Ces inférences sont mises en évidence par des structures semblables à celle du type « si … alors » mais elles mettent en jeu des connecteurs tels « comme on sait que…alors forcément… ». L'intervention suivante nous montre un exemple d'inférence de ce type :

123. T : **comme on a** la diagonale OD, je trace la continuation de la droite OD, on a la parallèle, non la perpendiculaire qui est AE, **comme c'est** un cercle, **comme on sait que** OA, OD, et OE sont des rayons du cercle et que OA est égal AD et que OE est égal AD aussi **alors forcément** DE est égal aussi

Ce type de connecteur n'a que le rôle d'introduire une nouvelle information dans la liste, mais il ne sert pas à mettre en relation deux ou plusieurs informations de la liste. En outre, *forcement* fait partie des modalités d'énoncé qui donnent une valeur épistémique sémantique liée au contenu de la phrase.

- La présence d'inférences tirées d'un pas de déduction de portée locale (les pas ne sont pas enchaînées)

Nous remarquons que les critères décrits ci-dessus constituent un sous-ensemble des unités linguistiques caractérisant le mode d'expansion discursive « accumulation » présenté au Chapitre III. Par conséquent, le modèle d'action « liste » peut participer du mode d'expansion de type « accumulation ».

Pour le mode d'expansion de type substitution, il faut un pas ultérieur par rapport à la seule prise en charge de la liste : la discrimination de certains éléments de la liste permettant de fournir les prémisses nécessaires et suffisantes pour l'enchaînement des pas de déduction qui participe d'une expansion de type « substitution ».

Avant de présenter les phases constituantes du modèle d'action *liste*, un point important est à dégager : les raisons pour lesquelles les élèves constituent une liste.

Pour aborder ce point, considérons la *formule générale d'inférence (Van Dijk)* la formule suivante : soient les informations C_1, C_2, … , C_i, appartenant au système des informations du sujet. On peut, à partir de ces informations, inférer l'information C_{i+1} ($i \in N$).

Or, comme les informations au tour desquelles on peut inférer sont multiples, il est possible remarquer que, dans certains cas, les élèves ayants à tirer une information (par exemple, la conclusion d'un pas constituant une hypothèse à prouver) formulent un ensemble de n informations, où n est supérieur au nombre de prémisses nécessaires pour inférer la connaissance C_{i+1}.

De ce qu'on vient de dire, nous pouvons supposer qu'inférer, en testant chaque fois le nombre d'informations nécessaires et suffisantes pour appliquer cette opération, n'est pas une procédure « économique » car elle oblige à se déplacer du domaine spatio-graphique (où les informations C_i peuvent être tirées) au domaine théorique (où les informations C_{i+1} est inférée) en continu, sans pouvoir vraiment entrer ni dans l'un ni dans l'outre. De là, la nécessité de produire une liste d'informations avant d'inférer.

Il nous semble essentiel, à cette étape, d'aborder la question des phases permettant de créer une liste d'informations.

1.4.1.1 Phases constituant du modèle « Liste »

Les phases qui caractérisent la création et le traitement d'un modèle *liste* sont notamment :

1. La phase de recueil des informations. Les informations peuvent provenir des données de l'énoncé, mais elles peuvent être obtenues par l'appréhension perceptive et opératoire du dessin, par l'interprétation du dessin ou bien par des inférences. Une information peut être obtenue par un pas de déduction, qui ne participe pas d'un enchaînement de pas de substitution.
2. La phase de regroupement des informations de la liste, qui consiste en la répétition séquentielle des informations de la liste.
3. La phase de traitement de la liste, qui concerne :

   3.1 Ajout d'informations qui permet l'agrandissement de la liste.

   3.2 Elimination d'informations. Cette opération concerne l'élimination d'une ou plusieurs informations de la liste par une inférence. En effet, le contrôle sur la liste s'impose lorsque la liste devient trop grosse pour être gérée. Le raccourcissement de la liste, sans en perdre des informations, est possible grâce à la déduction d'informations en remplaçant un ensemble d'information par une information équivalente.

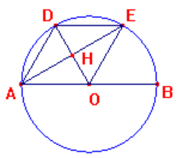
   3.3 Remise en ordre des informations. Cette opération consiste en la répétition des informations de la liste dans un ordre différent de celui de leur recueil.

Dans ce qui suit, nous essayerons d'aborder plus en détail la description de ces phases.

1 La phase de recueil des informations de la liste

Dans la géométrie, il y a une source naturelle pour obtenir des informations : le dessin. Les élèves peuvent obtenir des informations en passant par l'appréhension perceptive et opératoire du dessin, mais aussi par des inférences.

Les extraits suivants montrent comment une information est obtenue par l'appréhension opératoire ou perceptive du dessin:

 42 K/J : Ben AD égal AO, AO c'est le rayon et EO c'est un rayon du cercle donc forcement AD il est parallèle (*à OE*) -- 65. *S :* Puisque tout ça, puisque DA, AO et OE c'est tout égal, et **alors forcément** DE c'est égal,... c'est égal aussi parce que ça forme un quadrilatère	L'information « AD parallèle à OE » est obtenue par l'action conjointe de l'appréhension perceptive et opératoire du dessin L'action conjointe de l'appréhension perceptive et opératoire du dessin permet d'obtenir l'information « DE est égal aux segments DA, OA et OE »

---------------------- 36 G: ...tiens regarde, ça c'est symétrique par rapport à ça (*AO et DE*) **donc** en fait c'est le même ------------------------------------ 27. D :…**comme** ça *(DA)* est égal à ça *(AO)*, que AD est égal AO, **donc** DE est égal à OE	L'information « AO est symétrique par rapport au segment DE » est tirée de l'appréhension perceptive et opératoire du dessin L'appréhension perceptive et opératoire sont mises en évidence par l'usage du verbe « regarder » renvoyant à la perception, et par l'usage du mot déictique « ça », renvoyant à l'opération de désignation pure de la fonction référentielle.

Remarquons la présence de connecteurs tels « comme…alors », « donc forcément… », « il faut que…donc forcement » qui reprennent la structure du connecteur « si … alors » sans pour autant introduire une inférence justifiée par un énoncé-tiers (l'inférence est en effet tirée de l'appréhension perceptive et opératoire du dessin).

D'autres unités linguistiques telles « il est certain que... », « il me semble que… », « je crois que… », « il est évident que… », « il est probable que… », « il est possible que » apparaissent dans le modèle d'action « liste » en tant que modèle associé au mode d'expansion discursive « accumulation ». Or, l'analyse des protocoles montre que, ce modèle d'action « liste » est employé souvent dans le mécanisme centré sur le dessin. C'est pourquoi ces unités contribuent à associer aux propositions une valeur épistémique sémantique mais non un statut opératoire dans la phrase : les élèves peuvent associer aux propositions une valeur épistémique « vrai » mais non une valeur logique « vrai » car les propositions n'ont pas un statut de prémisse ou de conclusion (seulement de portée locale).

Remarquons que les modalités telles : falloir, vouloir, devoir, sont utilisées pour des raisons de contrat en oppositions à des raisons de type théorique, qu'on retrouve lors de la verbalisation d'un théorème (comme on verra dans le modèle « final »)

Les informations peuvent être tirées aussi bien par l'interprétation du dessin que par inférences. Par exemple, dans l'intervention [8]

8 E : AO est rayon, OE est rayon, **donc** AO est égal à OE car ils sont des rayons   …12 E : H, ainsi le triangle AHO est un triangle rectangle   16 E : … AO est égal à AD donc le triangle AOD est isocèle. Pour mieux dire il est équilatéral. Donc le triangle AHO est un triangle particulier, un triangle 30, 60, 90 (*degrés*)

Les informations C_1 : « OA rayon » et C_2 : « OE rayon » sont obtenues par l'interprétation du dessin, car elles ne font pas partie de l'ensemble des données du problème. L'information C_3 : « AO=OE » est obtenue par inférence à partir des informations C_1 et C_2 recueillies. On reconnaît l'inférence par la présence du connecteur « donc ».

Remarquons comment toute inférence permettant d'ajouter des informations à la liste

n'a pas le rôle de mettre en relation deux informations de la liste, mais seulement d'inférer une information à ajouter à la liste. En effet, il se peut que les informations C1, C2 et C_2 soient toutes gardées dans la liste. C'est pourquoi, l'inférence qui permet d'ajouter une information à la liste, ne participe pas d'un enchaînement de pas de déduction. Pour autant elle appartient à un mode d'expansion discursive de type accumulation plutôt que substitution.

2. La phase de regroupement des informations de la liste

Le regroupement se fait par la répétition en bloque des informations collectées au cours du processus, en suivant l'ordre dans lequel les informations ont été explicitées. (voir les interventions [43] ÷ [47] du protocole Elena et Barbara, en Annexe [2] au chapitre V)

3. La phase de traitement de la liste

L'analyse des protocoles a mis en évidence que, parfois, le sujet construit une implication entre deux informations de la liste mais il garde dans la liste les deux informations, et l'implication ainsi construite. En d'autres termes, si P est une information de la liste, et Q une autre information de la liste, le sujet construit l'implication $P \Rightarrow Q$ et il garde dans la liste la donnée P, la conclusion Q et l'implication $P \Rightarrow Q$. Dans ce cas, le traitement de la liste par inférence n'est pas utilisé pour éliminer des informations et la liste ne cesse de croître. Par exemple, de l'information P : « AO=AD » appartenant aux données du problème, on peut tirer l'information Q : « OAD est un triangle isocèle ». Or, souvent les élèves gardent dans la liste l'information P et l'information Q déduite.

Mais, lorsqu'une liste devient trop grosse pour être gérée, les élèves la traitent en supprimant des informations. L'élimination d'une ou plusieurs informations de la liste se réalise par une inférence avec ou non perd d'information. Par exemple, aux informations C_1« OA rayon » et C_2« OE rayon » peuvent être substituées l'information C_3: « AO=OE ».

Le dernier point à développer concerne la remise en ordre des informations de la liste. Une nouvelle disposition des informations semble être nécessaire pour les élèves lorsque les informations acquièrent un rôle différent de celui qu'elles avaient au moment de leur explicitation. Le rôle d'une information dans la liste devient dépendant de la finalité de la liste même. L'ordre séquentiel des informations de la liste peut aussi être conditionné de la finalité de la liste : simple recueil d'information ou recherche guidée d'informations. C'est l'objet du paragraphe suivant.

1.4.1.2 Finalités de la liste

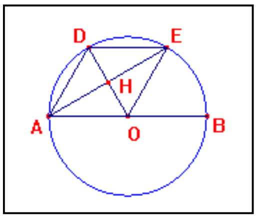
Les finalités de la liste que nous avons identifiées lors de l'analyse des protocoles sont au nombre de deux : l'une caractérisée par la nécessité pour les élèves de recueillir des informations pour aborder un processus déductif (par exemple, pour évoquer un théorème utile qui guidera le processus), l'autre qui suit la verbalisation du théorème et qui vise à la vérification des seules prémisses du théorème. Cette dernière finalité peut être interprétée de façon plus générale lorsque la liste vise répondre à une question que l'élève s'est posée lui-même, comme par exemple celle de prouver une certaine prémisse du théorème évoqué.

Nous adopterons dans ce qui suit, les termes « finalité recherche » et « finalité vérification » pour distinguer les deux finalités ci-dessus décrites.

Evidemment, le traitement de la liste, tel l'ajout ou l'élimination de certaines informations, dépendra de sa finalité.

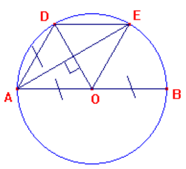
Pour donner un exemple de cette double finalité, nous présenterons un extrait du protocole de Kévin et Jérémie dans lequel on peut mettre en évidence le changement de finalité de la liste par rapport à l'objectif visé par les élèves. D'abord, la recherche des informations a pour finalité de chercher les informations suffisantes pour aboutir à l'évocation d'un théorème, et, en suite, la recherche d'informations aura pour finalité de vérifier une hypothèse du théorème évoqué (cf. fonction de guide).

(Problème A1)

34.J : déjà il y a les diagonales qui se coupent en leur milieu et qui sont perpendiculaires	**FINALITÉ RECHERCHE** Diagonales perpendiculaires Diagonales qui se coupent dans leur milieu
41. K : [---] c'est un parallélogramme, je croyais que c'est un parallélogramme	Le quadrilatère est un parallélogramme
42. J : les cotés opposés sont parallèles, et ça c'est un rayon *(OE)* On sait que c'est un parallélogramme, il faut prouver que c'est un losange justement, c'est un parallélogramme spécial. Bon alors, pour prouver que ces côtés sont parallèles … Bien AD égal AO, AO c'est le rayon et EO c'est un rayon du cercle donc forcement AD il est parallèle à OE 	Côtés opposés parallèles OE = rayon AD=AO AO = rayon OE = rayon AD // (OE) Le recherche d'informations n'est pas guidée de la verbalisation de l'énoncé d'un théorème, c'est pourquoi elle se présente comme un simple recueil d'informations juxtaposées
	FINALITÉ VÉRIFICATION
45. K : **si les diagonales sont perpendiculaires et elles se coupent dans leur milieu c'est un losange** …. 54. J : ou alors, OD c'est sûr que c'est un rayon 55. K: déjà on sait que OD est perpendiculaire à AE puisque 60. J : ben, c'est surtout qui se coupent dans leur milieu Attends on réfléchit deux minutes avant de… *AO = AD* 64. J : donc, AE est perpendiculaire à OD et on cherche à prouver que ben ils se coupent dans leur milieu quoi ……… 68. J : il y a peut être un truc avec les vecteurs 69. K : ouais, mais en plus je ne me rappelle plus, je ne me rappelle plus des propriétés. Je pense à un point qui est égal à EA [---] quelque chose, je ne me rappelle plus…	Verbalisation du théorème OD = rayon OD⊥AE AO = AD AE ⊥OD La recherche d'informations est guidée par la nécessité de vérifier la prémisse : « diagonales qui se coupent dans leur milieu ». Cette recherche aboutit à un mot et une configuration étiquette qui permettra l'évocation du théorème sur la somme de vecteurs.

L'analyse des protocoles nous a permis de reconnaître le modèle d'action « liste » dans les deux mécanismes, celui centré sur le dessin et celui centré sur l'énoncé. Or, si, dans le mécanisme centré sur le dessin, la liste semble avoir une finalité de recherche, dans le mécanisme centré sur l'énoncé, la liste, qui souvent suit la verbalisation de l'énoncé du théorème (pilote), semble avoir plutôt une finalité de vérification. Il nous apparaît pertinent d'attribuer la liste ayant une finalité de recherche au mode d'expansion discursive de type « accumulation », tandis que la liste ayant une finalité de vérification au mode d'expansion discursive de type « substitution ». Ainsi, l'analyse des protocoles permet de remarquer que la liste ayant finalité de vérification (qui apparaît au cours de processus) est parfois obtenue à partir de la liste ayant une finalité de recherche (en effet, un mode d'expansion « substitution » suit un mode d'expansion « accumulation » au cours du processus de résolution). Elle est obtenue grâce à des traitements constituant à modifier la liste à finalité de recherche. Les traitements peuvent être le changement d'ordre des informations ou la suppression de certaines informations et sont guidés par le théorème verbalisé par les élèves.

Par exemple, l'extrait suivant, issu du protocole de Elena et Alessandra (Problème B1), montre comment une information est supprimée d'une liste grâce au rôle de guide joué par la verbalisation de l'énoncé d'un théorème:



2.E : […] AE est perpendiculaire à OD, AO=AD. Démontrer que OADE est un losange…AO est un rayon du cercle, OD est un rayon du cercle, OE est rayon du cercle, AD=AO donnée, donc **le losange… est un quadrilatère ayant les quatre côtés égaux**
7.A : je ne comprends pas qu'est-ce que tu veux faire !
8.E : AO, OE et OD sont rayons du cercle, et ils sont égaux… ah oui, OD il sert à rien !
9.A : pourquoi ça sert pas ?
10 E : parce qu'il est une diagonale… puis AD est égal AO….

L'information « OD est un rayon » et l'information reliant OD aux segment AO et OE par une relation d'égalité sont supprimées dans la liste grâce à la verbalisation du théorème à l'intervention [2] (en noir). Ces informations ne sont pas nécessaires pour la vérification l'hypothèse du théorème : montrer que le quadrilatère a quatre côtés égaux.

Il est évident que, des informations de la liste sont retenues seulement celles utiles par rapport au théorème choisi, donc les élèves opèrent une sorte de tri dans la liste même.

On peut donc postuler que le langage exerce une fonction de mémoire sélective sur les informations de la liste. Précisons-la ci-dessous.

1.4.1.3 Fonction de mémoire sélective

La liste a une fonction de mémoire sélective.

En général, dans les problèmes de géométrie, l'interprétation du dessin joue un rôle très important car il permet d'obtenir des informations (certaines propriétés spatiales du dessin peuvent être interprétées comme renvoyant à des propriétés de l'objet), c'est pourquoi nous considérons le dessin comme auxiliaire de mémoire. Cependant, nous remarquons que le dessin possède des caractéristiques de mémoire d'ensemble, tandis que le langage représente une mémoire sélective. Ainsi, le langage permet de sélectionner, dans l'ensemble de toutes les informations obtenues du dessin, un sous-ensemble d'informations qui participeront à la liste d'informations.

1.4.1.4 Interrelations entre la fonction de mémoire sélective et la fonction d'association du langage

Les informations composant la liste, sélectionnées par la fonction de mémoire du langage, conditionnent aussi le choix du théorème à évoquer. Comme l'on a plusieurs fois remarqué, l'évocation du théorème souvent passe par l'association d'un mot ou d'une configuration étiquette appartenant à certaines informations de la liste, et cela en accord avec la fonction d'association du langage. Or, l'analyse des protocoles, et surtout la comparaison des protocoles italiens avec des protocoles français, a mis en évidence comment la même information puisse déclencher l'évocation de différents théorèmes par rapport au système de connaissances des élèves.
Par exemple, si en Italie, l'information « AO=AD » peut permettre d'évoquer le théorème « un triangle ayant deux côtés égaux est isocèle », en France, par contre, la même information « AD=AO » a plus de chances d'évoquer la symétrie des points : « les points O et D sont symétriques par rapport à l'axe AE ». Dès lors, l'évocation du théorème par l'association aux informations de la liste, dépend donc du contexte institutionnel.

1.4.2 Modèle d'action « Final »

Le modèle d'action *final* se développe à partir de la question du problème pour déclencher le processus de résolution. C'est pourquoi, ce modèle se présente souvent dans les protocoles qui nous avons classifié au moyen du mécanisme centré sur l'énoncé.
Un exemple de « modèle d'action finale » est donné par l'intervention suivante, issue du protocole du binôme Camille – Gaëlle (problème B1) :

12. Camille : ouais, ouais, <u>pour</u> un losange <u>il faut</u> dire que les diagonales se coupent dans leur milieu et elles sont perpendiculaires

Ce modèle est caractérisé par la recherche de « la cause » à partir de « l'effet » : dès qu'on arrive à définir la cause, la transformation d'une structure « finale» en une structure « conditions - conséquence [23]» du discours peut se produire. Dans un modèle d'action finale, l'action porte sur la recherche des conditions nécessaires et suffisantes pour arriver à l'effet,

[23] La structure « conditions - conséquence » du discours est de type « si… alors », par exemple : si les diagonales sont perpendiculaires et elles se coupent dans leur milieu (cause), alors le quadrilatère est un losange (effet) »

dans notre cas particulier le losange. C'est pourquoi, les élèves prennent en charge la définition du losange ou les théorèmes sur le losange qui permettent de définir les éléments théoriques (cause) nécessaires et suffisantes à la caractérisation du losange.

En général, l'appréhension opératoire et l'interprétation du dessin permettent de repérer ces conditions. Il est évident que l'appréhension opératoire et l'interprétation du dessin seront guidées par la verbalisation de l'énoncé du théorème explicité par la structure finale.

Par exemple, si la question du problème « démontrer que le quadrilatère est un losange » est transformée selon la structure finale de la façon suivante : «afin que le quadrilatère soit un losange (effet), les diagonales doivent être perpendiculaires et doivent se coupent dans leur milieu (cause)» les relations géométriques requises afin que le quadrilatère soit un losange sont les diagonales perpendiculaires qui se coupent dans leur milieu. A partir de là, l'appréhension opératoire et l'interprétation du dessin seront conduites pour repérer (c'est-à-dire pour reconnaître sur le dessin) deux segments, étant diagonales d'un quadrilatère, tels qu'ils soient liés par la relation de perpendicularité et de se couper dans leur milieu. Donc, c'est à partir du référent théorique que la résolution du problème se déplace vers l'appréhension opératoire du dessin.

Un des critères permettant de reconnaître un modèle d'action de type « final» est notamment la présence de la modalité « il faut » accompagnée de verbes tels « dire, démontrer, prouver…. ». Remarquons que ces unités linguistiques caractérisent le mode d'expansion discursive « substitution » si elles sont utilisées par nécessité théorique, comme nous l'avons remarqué dans le Chapitre III.

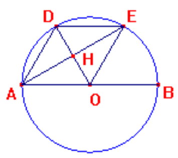
1.4.3 Modèle d'action « hypothético-déductif »

Le modèle d'action « hypothético-déductif » consiste en une déduction où l'ordre séquentiel des pas d'une démonstration n'est pas respecté mais cependant cette déduction est linéaire. En effet, si une déduction est définie par l'ordre séquentiel des pas tells « ayant A et $A \Rightarrow B$, on peut en déduire B », l'ordre du modèle hypothético-déductif est, en revanche, du type : « si on veut conclure B à partir de A, on va rechercher d'abord un théorème qui permet de déduire B à partir de A et, dès qu'on a trouvé le théorème $A \Rightarrow B$, on va prouver A ». Donc, au moment où le théorème $A \Rightarrow B$ est appliqué, A est une hypothèse plausible mais pas encore vraie car elle n'a pas été encore démontrée. Lorsqu'on a trouvé le lien entre A et B ($A \Rightarrow B$) alors on revient à A et on démontre A. Au cas où les élèves n'arrivent pas à identifier le théorème $A \Rightarrow B$, ils renoncent à s'investir dans une opération parfois plus coûteuse comme celle de démontrer A.

L'idée à la base de ce type de raisonnement est « l'économie » dans le développement d'un processus de résolution : on se donne pas la peine de démontrer A tant qu'on n'a pas trouvé un lien entre A et B, c'est-à-dire le théorème A⇒B. Pour le fait que l'économie de l'effort de démonstration gère le raisonnement, nous semble vraisemblable de dire que ce type de raisonnement est très proche d'un raisonnement d'expert.

Par exemple, en reprenant l'extrait du protocole de Elena et Alessandra (extrait ci-dessous, Problème B1), remarquons que Elena, en supposant démontrée l'hypothèse A : « le quadrilatère est un parallélogramme » (intervention [51]), recherche le théorème liant cette hypothèse à la conclusion B : « le quadrilatère est un losange ». Dès qu'elle verbalise le théorème A⇒B « un parallélogramme ayant les côtés égaux est un losange » (interventions [51], [54] et [55]) le processus se déplace vers la vérification de l'hypothèse A « le quadrilatère est un parallélogramme ».

[24]…



47.E : et puis, ils sont égaux aussi AH et HE, et aussi DH et HO. Donc …. Il y avait un théorème … « les diagonales d'un parallélogramme se coupent dans leur milieu »
48.A : il est : « si les diagonales se coupent dans leur milieu, alors le quadrilatère est un losange »
49.E : je ne sais pas si ça marche
50. A : je vais regarder sur le manuel
51. E : mais, **en supposant que ça marche**, on a un parallélogramme ayant les côtés égaux, donc il est bien un losange, non?
52.A : il est un losange ! mais on va regarder sur le manuel… voyons…parallélogramme… « dans un parallélogramme les deux diagonales se coupent dans leur milieu », voilà ! ! Donc, s'il est comme ça, il est un parallélogramme, notre [quadrilatère] est un parallélogramme. Et puis ?
53.E : et puis on avait dit que s'il a aussi les côtés égaux, il est un losange
54.A : on va regarder sur le manuel…losange… « un parallélogramme ayant quatre côtés égaux est un losange » voilà ! !
55.E : un moment, un parallélogramme est un losange si les diagonales sont perpendiculaires, et elles le sont
56.A : alors on peut le dire [on peut conclure que le quadrilatère est un losange] en disant qu'il est un parallélogramme avec quatre côtés égaux ou bien en disant qu'est un parallélogramme ayant les diagonales perpendiculaires.

En fin, comme le modèle d'action hypothético-déductif participe d'un processus déductif, le mode d'expansion discursive que nous reconnaissons sera de type « substitution ».

[24] 41.E : parce que nous on a démontré que les deux triangles sont superposables
43. E : et <u>tous ces triangles sont égaux</u> par propriété transitive car AD est égale à AO parce que il est donné, puis, AO est égal à OE car ils sont des rayons et ED est égal aux rayons car…. On l'a démontré (*par Critères d'isométrie des triangles*) et puis ils sont tous des triangles rectangles
44.A : et puis parce que DH et HO sont égaux et tous les triangles ont ces côté comme base
45.E : et donc ils sont tous égaux… et donc quoi ?

1.4.4 Différences entre le raisonnement de type hypothético-déductif et l'abduction

Le raisonnement de type hypothético-déductif semble être proche au raisonnement par abduction mais, au contraire, ils se distinguent pour des différences substantielles. C'est pourquoi, il parait nécessaire d'aborder la question.

Même si nous n'approcherons pas le raisonnement par abduction de façon pointue, nous pouvons également en proposer une définition à comparer avec la définition du raisonnement hypothético-déductif pour permettre de les distinguer.

La règle qui gère le raisonnement de type hypothético-déductif peut être représentée de la façon suivante :

$$\frac{A \quad A \rightarrow B}{B}$$

En supposant que A soit vrai, il faut prouver B. C'est pourquoi, on recherche un lien entre A et B, c'est-à-dire un théorème que, à partir de A, permet de conclure B. Il y a à ce moment deux possibilités :

- On récupère le théorème $A \rightarrow B$ dans le système de connaissances disponibles
- On ne récupère pas le théorème $A \rightarrow B$ dans le système de connaissances disponibles

Dans le premier cas, on va prouver A, dans le deuxième cas, on ne se donne pas la peine de prouver A tant qu'on n'a pas $A \rightarrow B$. Le processus s'adresse alors vers la recherche d'autres prémisses pour définir autres pas de déduction.

Donc, lors du raisonnement hypothético-déductif le but est de récupérer le théorème $A \rightarrow B$; ce **théorème sera donc inconnu au début du processus hypothético-déductif.**

Venons maintenant à la règle permettant de schématiser l'abduction. À ce propos nous nous appuyons sur de la théorie de Peirce :

$$\frac{\mathbf{A \rightarrow B} \quad B}{\mathbf{A}}$$

En supposant que $A \rightarrow B$ et B soient vrais, on se demande si A est vrai, parce qu'il se peut que B soit vrai sans que A soit vraie. En d'autres termes, une abduction se présent lorsqu'on se propose à vérifier A pour que le théorème qu'on a prise en charge, $A \rightarrow B$, puisse être appliqué afin de prouver B. Donc, lors de l'abduction le but n'est pas de récupérer le théorème $A \rightarrow B$ mais la prémisse A ; **le théorème $A \rightarrow B$ est connu au début du pas d'abduction**.

La différence substantielle entre le raisonnement de type hypothético-déductif et l'abduction est donc au début du processus : si le raisonnement hypothético-déductif démarre sans connaître le théorème $A \rightarrow B$, l'abduction démarre sur la base du théorème $A \rightarrow B$.

Un exemple de raisonnement hypothético-déductif est le suivant.

A : un quadrilatère est un parallélogramme
<u>A→B : tout parallélogramme ayant les diagonales perpendiculaires est un losange</u>
B : Le quadrilatère est un losange

Alors, l'implication A→B « tout parallélogramme ayant les diagonales perpendiculaires est un losange » reprisent le théorème qu'il faut trouver. La proposition B « le quadrilatère est un losange » est la proposition qu'il faut prouver. Les élèves, en supposant vraie la proposition A « le quadrilatère est un parallélogramme », recherchent le théorème qui puisse relier A « le quadrilatère est un parallélogramme », à B « le quadrilatère est un losange ». En d'autres termes, comme il faut rendre vraie l'implication : « un parallélogramme […]est un losange », dès que les élèves récupèrent le théorème « tout parallélogramme ayant les diagonales perpendiculaires est un losange », ils s'engagent à démontrer A « le quadrilatère est un parallélogramme ».

Venons alors à un exemple d'abduction.

A→B : « tout parallélogramme ayant les diagonales perpendiculaires est un losange »
<u>B : « ce parallélogramme est un losange »</u>
A : «les diagonales du parallélogramme sont perpendiculaires »

Supposons de prendre en charge le théorème A→B « tout parallélogramme ayant les diagonales perpendiculaires est un losange » et la proposition B « ce parallélogramme est un losange ». L'abduction est mise en acte lorsqu'on cherche à vérifier l'hypothèse A du théorème A→B ci-dessus décrit, c'est-à-dire lorsqu'on cherche à vérifier « les diagonales du parallélogramme sont perpendiculaires » afin d'appliquer le théorème A→B.

2. Profil des binômes

Comme nous l'avons avancé dans au paragraphe 1.2 de ce chapitre, le degré d'importance[25] des fonctions de guide ou planification dépend aussi du profil des binômes ainsi que de la difficulté du problème à résoudre.

Le degré d'importance joué par la fonction de guide, de contrôle ou de planification dépend aussi de l'appariement des élèves en train de résoudre le problème et qu'il ne semble pas dépendre d'un seul des deux élèves ni de la seule difficulté du problème.

[25] Rappelons que nous avons défini le « degré d'importance » d'une fonction comme le nombre d'occurrences de cette fonction sur le nombre totales des tours de parole du protocole

Nous avons observé qu'en général, la fonction de guide (exercé par la re-verbalisation au cours du processus des prémisses encore à vérifier du théorème) n'est pas mise en place par l'élève qui verbalise le théorème utile à la résolution, sauf dans le cas où il constitue une aide pour le camarade. De l'analyse des protocoles nous avons identifié trois situations différentes :

- Cas de Camille et Gaëlle : Camille verbalise le théorème pilote utile à la résolution du problème ; le guidage est exercé par Camille elle-même, mais elle s'adresse à Gaëlle (protocole en Annexe).
- Cas de Kévin et Jérémie : Kévin verbalise le théorème pilote utile à la résolution du problème ; le guidage est exercé par Jérémie comme aide adressée à lui-même, pour mettre en évidence, au cours du processus, les prémisses qu'il faudrait prouver (protocole en Annexe).
- Cas de Davide et Vito : Chaque élève verbalise un des théorèmes utiles à la résolution du problème. Ainsi, Davide verbalise le théorème «un quadrilatère ayant les diagonales qui se coupent dans leur milieu et perpendiculairement, est un losange» et Vito verbalise le théorème «un quadrilatère ayant les côtés égaux est un losange». Dans ce cas, chaque élève utilise la fonction de guide du langage en reformulant les prémisses manquantes contextualisées dans le processus. De plus, la fonction de guide renforce la fonction de planification du langage qui la suit. Mais, le théorème qui sera utilisé pour répondre à la question du problème, et donc qui jouera le rôle de théorème pilote, est le théorème verbalisé par Vito. En effet, Vito reformule les prémisses de l'hypothèse de « son » théorème, tandis que Davide ne le fait pas que pour certaines seulement (protocole en Annexe).

Dans ce dernier cas, donc, les élèves sont suffisamment forts pour produire la verbalisation de deux théorèmes pilote différents et l'avancement de la résolution du problème peut s'appuyer sur le fait que chacun des élèves veut convaincre le camarade de son bon choix. C'est pourquoi, l'interaction verbale entre les élèves d'un tel binôme sera très « développée ». Ainsi, la fonction de guide aura un degré d'importance élevé car les re-verbalisations contextualisées des prémisses du théorème guideront l'action de chacun des sujets dans le processus.

L'importance de la fonction de guide est mise en évidence par ces exemples qui montrent comment la verbalisation de l'énoncé d'un théorème et la re-verbalisation des ses prémisses au cours du processus de résolution sont des aides pour l'élève « faible » pour aboutir à la solution du problème. Il est intéressant d'observer que soit dans le cas où la re-verbalisation des prémisses est faite par l'élève qui verbalise le théorème pilote, soit dans le cas où ces re-verbalisations sont faites par le camarade, la fonction de guide du langage est mise en place quoiqu'il en soit.

Le tableau suivant fournit le degré d'importance des fonctions de guide et de planification et signale la présence de la fonction de contrôle dans un certain nombre de protocoles représentatifs de notre expérimentation

Tableau 6.5

Le nombre des marques « • » est égal à mille fois le degré d'importance que les fonctions jouent dans le processus de résolution du binôme. Le degré d'importance sur lequel nous nous appuyons est fourni par le tableau au paragraphe 1.2.1. Pour ce qui concerne la fonction de contrôle, nous signalons dans le tableau sa présence dans les processus de résolution.

Problèmes A et B	**Fonction de guide**	**Fonction de planification**	**Fonction de contrôle**
Camille/ Gaëlle	• • • • • • •	• • •	non
Kévin / Jérémie	• • • • • •	• • •	non
Vito /Davide	• • (Vito) • • • • • (Davide)	• • (Vito) • • • • •(Davide)	oui
Alessandra/Elena	•	•	oui

Nous avions remarqué au paragraphe 1.2.1 que la fonction de planification du langage est liée à la fonction de guide. Le Tableau 6.5 montre que le degré d'importance de l'une et de l'autre ne sont pas exactement égaux. En effet, en observant le tableau, on remarque que dans le protocole de Camille et Gaëlle et de Kévin et Jérémie la fonction de guide et celle de planification ne possèdent pas le même degré d'importance.

L'analyse du protocole de Camille et Gaëlle montre comment l'action de la fonction de guide du langage, concernant la re-verbalisation contextualisée des prémisses, est exercée par Camille, mais adressée à Gaëlle : cette reformulation semble aider Gaëlle à suivre le processus de résolution proposé par Camille. L'action « forte » de la fonction de guide est donc adressée à Gaëlle plutôt qu'à Camille[26], et cela explique que la fonction de planification soit presque absente. En effet, il semble évident que pour Camille la fonction de planification n'est pas ressentie comme nécessaire pour le développement du processus, parce que ce dernier est déjà mentalement planifié.

Ce protocole est significatif car il illustre l'action « forte » de la fonction de guide, adressée à

[26] L'action de la fonction de guide est « faible » par rapport au processus de résolution proposé par Camille, car elle n'utilise pas cette fonction comme outil pour l'avancement du processus.

l'élève faible du binôme. Dans le binôme, donc, est présent un déséquilibre entre les élèves (cf. Chapitre II).

Un autre exemple où la fonction de guide semble avoir un degré d'importance plus fort par rapport au degré d'importance de la fonction de planification du langage est fourni par le protocole de Kévin et Jérémie. Ce binôme relève encore d'un déséquilibre entre les élèves, mais ici la fonction de guide (re-verbalisation contextualisée des prémisses) est conduite par l'élève faible (Jérémie) car elle lui est nécessaire pour suivre le processus de résolution proposé au moyen du théorème pilote. Dans ce protocole, le langage exerce une fonction de planification dans les interventions de Kévin, l'élève qui a verbalisé le théorème pilote. Il apparaît que Kévin n'a pas fortement besoin de planifier l'enchaînement des pas de déduction pour vérifier les prémisses de l'hypothèse du théorème sauf dans le cas où la vérification semble être difficile pour lui (intervention [124]).

En conclusion le décalage observé entre l'importance de la fonction de guide et celle de planification est du au déséquilibre entre les élèves du binôme.

Le cas de Vito et Davide montre le degré d'importance de la fonction de guide et de la fonction de planification par rapport à un binôme dans lequel les élèves relèvent d'un équilibre. Entre les élèves il y a une relation d'équilibre parce que les élèves proposent chacun un théorème pilote (différent). Nous remarquons que la fonction de guide est exercée par l'élève qui verbalise l'énoncé du théorème. Mais dans ce cas, le rôle de la fonction de guide et de la fonction de planification n'est pas d'aider le camarade à ne perdre pas le fil du processus de résolution, mais plutôt celui de convaincre le camarade de le bon choix du théorème pilote. Pour cette raison le degré d'importance de la fonction de guide et de la fonction de planification sont égaux. Nous remarquons en outre que le degré d'importance de la fonction de guide exercé par la verbalisation du théorème de Vito est inférieur au degré d'importance de la fonction de guide exercée par la verbalisation de Davide, cela parce que le théorème proposé par Davide acquerra le rôle de théorème pilote pour le processus de résolution du binôme.

Nous avons pu remarquer que la fonction de contrôle ne s'exerce pas chez tous les binômes engagés dans l'expérimentation mais plutôt nous avons remarqué la présence d'une re-verbalisation de l'énoncé du théorème pilote a la fin du processus par un effet du contrat. Le seul processus où n'apparaît pas la verbalisation à la fin du processus de résolution est celui de Hana et Christelle. Or, comme il s'agit du seul binôme constitué de deux élèves faibles, on peut faire l'hypothèse que cette fonction requiert une certaine maîtrise de la démonstration. C'est une question à vérifier par d'autres expérimentations.

Ainsi, nous avons reconnu principalement deux profils qui influent sur le degré d'importance des fonctions de guide et de planification :

- le profil relevant d'un déséquilibre dans les élèves du binôme. Un des deux élèves est plus faible que l'autre et il a besoin de la fonction de guide qui lui est fournie par le camarade (Camille pour Gaëlle) ou bien par lui-même (Jérémie pour Jérémie). La fonction de guide consistera alors en la re-verbalisation des prémisses contextualisées au cours du processus, pour ne perdre pas le fil de l'avancement du processus de résolution.
- le profil relevant d'un équilibre dans les élèves du binôme. Les deux élèves sont suffisamment forts pour proposer chacun un théorème pilote. Cela amène chaque élève à la verbalisation d'un projet à lui. C'est pourquoi, ils ont besoin de la fonction de guide pendant le développement du processus de résolution pour imposer leur propre stratégie sur celle du camarade (Davide et Vito).

3. Le langage en tant que révélateur

L'idée du langage en tant que révélateur est l'un des deux aspects de notre recherche. Nous nous sommes appuyés sur l'idée que certaines unités linguistiques puissent être révélatrices du langage en tant qu'outil pour l'avancement de la résolution (voir les fonctions du langage, les modèles d'action…). Nous avons développé notre analyse à partir de la liste des unités linguistiques fournie par Bronckart pour définir un discours théorique et un discours en situation. Mais, comme présenté au Chapitre III, nous considérons le discours produit par l'interaction des élèves en train de résoudre le problème comme un discours théorique en situation (voir le paragraphe 3.3.4, Chapitre III) car l'évolution du processus de résolution passe par l'évolution des modes d'expansion discursive (accumulation, substitution). Donc, si Bronckart postule une relation biunivoque entre la présence de certaines unités linguistiques et les différents types de discours, nous avons postulé, en revanche, que les <u>usages</u> <u>différents</u> des unités linguistiques permettront de reconnaître les modes d'expansion discursive ainsi que les différentes fonctions du langage. C'est pourquoi, nous avons ajouté a priori à la liste fournie par Bronckart des unités linguistiques spécifiques du discours de résolution d'un problème de géométrie plane (cf. chapitre III) en précisant leurs usages.

2.1 Unités linguistiques

Les usages définis ont permis dans l'analyse des protocoles de distinguer les deux modes d'expansion discursive accumulation et substitution et donc de repérer les modèles d'action liste et final. On devait alors chercher la fonction d'association dans le modèle liste et la fonction de planification dans le modèle final. En résumé, les usages des unités linguistiques nous ont bien servit pour l'identification des modèles d'actions et de certaines fonctions. Cependant nous avons rencontré quelques problèmes dans cette identification comme on le verra dans le paragraphe suivant

2.1.1 Modification de la liste d'unités linguistiques

Il a fallu agrandir la liste des unités linguistiques sur laquelle nous nous sommes appuyés pour l'analyse des processus de résolution.

Les **adverbes temporels** apparaissent a priori seulement dans la liste des unités relevant du mode substitution pour exprimer l'ordre dans lequel s'effectuent les opérations de substitution. Or, comme nous l'avons remarqué dans la description du modèle d'action liste, les adverbes temporels servent aussi pour imposer un ordre aux informations d'une liste et donc, pour la juxtaposition des propositions : « nous avons…et **puis**…**après** ça, il faudrait voir si… ». Les adverbes temporels (encore, aussi, ensuite, puis, après …) qui apparaissent dans le mode d'accumulation sont accompagnés aussi des conjonctions de coordination ou d'union (et) pour recueillir une séquence d'informations composant la liste. Les adverbes temporels sont utilisés aussi dans les projets pour exprimer l'ordre séquentiel des opérations du projet même comme le montre l'intervention suivante :

J : ouais, il faut prouver que justement ça c'est le milieu de … il faut **d'abord commencer** par OD mais bon si on prouve OD **après** serait facile on pourrait faire le truc des vecteurs

En conclusion les adverbes temporels jouent dans un plus grand nombre de circonstances que prévu.

Les **temps verbaux** dans un discours, sont en général la trace de la relation directe entre le discours et les repères temporels de la situation matérielle de production. Or, nous avons remarqué dans l'analyse des protocoles que lors d'un discours issu d'un processus de résolution d'un problème de géométrie plane, cela n'est pas exactement le cas. Nous avons reconnu d'autres usages pour les temps des verbes par rapport à la seule trace de relations entre les repères temporels et la situation problème. Par exemple, dans l'intervention [49] du protocole de Kévin et Jérémie (extrait ci-dessous) l'imparfait indicatif du verbe « croire » signale que la proposition assume une valeur épistémique sémantique dont le contenu apparaît vraisemblable mais pas certain. Il faut souligner que cette valeur épistémique sémantique passe aussi par le verbe « croire » et non par le seul temps imparfait de ce verbe. En revanche, le temps présent indicatif du verbe « être » appartenant à l'intervention suivante, (« les côtés opposés **sont** parallèles », « c'**est** un parallélogramme ») signale que la proposition assume une valeur épistémique dont le contenu apparaît comme certain.

50. K : [---] **c'est** un parallélogramme, je **croyais** que c'est un parallélogramme

51. J : les côtés opposés **sont** parallèles, et ça c'est un rayon *(OE)*

On sait que **c'est** un parallélogramme<u>, il faut prouver que c'est un losange justement, c'est un parallélogramme spécial.</u> Bon alors, pour prouver que ces côtés sont parallèles …

Ben AD égal AO,<u> AO c'est le rayon et EO c'est un rayon du cercle</u> donc forcement AD il est parallèle

Nous avons donc remarqué trois usages du temps présent indicatif :

- le présent indicatif est utilisé lors d'une substitution pour signaler que la proposition a la valeur vraie.
- le présent indicatif est utilisé lors d'une accumulation pour signaler que la proposition a une valeur épistémique sémantique dont le contenu apparaît certain. Par exemple, la valeur est tirée d'une appréhension opératoire du dessin, comme le montre l'intervention [24] du protocole d'Olivier et Djamel : « 24 O: Ah oui, parce <u>qu'ils se coupent</u> dans leur milieu »
- le présent indicatif introduit une proposition certaine car la proposition relève d'une donnée de l'énoncé du problème. Par exemple, dans l'intervention [31] du protocole d'Olivier et Djamel : « 31 D: Comme dans l'énoncé <u>on dit que</u> AD est égal à AO… »

De ce qu'on vient de dire, il nous semble vraisemblable d'affirmer que l'usage des temps verbaux est susceptible d'affecter aussi la valeur épistémique des propositions énoncées. En outre, sur la base des liens entre les valeurs épistémiques des propositions et les modes d'expansion discursive que nous avons abordés au Chapitre III, les temps verbaux peuvent du coup signaler aussi le mode d'expansion discursive auquel la proposition appartient (temps verbaux ⇔ valeurs des propositions ⇔ modes d'expansion discursive). Ainsi, l'évolution de l'usage des temps verbaux, nous permet de relever l'évolution des modes d'expansion discursive.

En conclusion les usages des unités linguistiques retenues a priori comme indicateurs ont bien fonctionné dans l'analyse des protocoles. Signalons en particulier que tous les usages prévus sont apparus dans les protocoles, seul les quelques cas mentionnés plus haut doit être ajoutés à la liste constituée a priori.

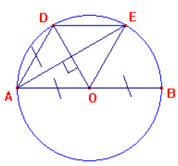
4. Point de vue générale sur les résultats

Nous avons montré que le langage joue plusieurs fonctions lors de la résolution d'un problème de géométrie plane. Nous avons reconnu les conditions pour que ces fonctions s'exercent liées aux sujets, au profil des binômes, au contexte, à la complexité du problème et à l'avancement des résolutions du problème. Ces fonctions sont en interrelation et elles sont associées à des modèles d'action : la fonction d'association se produit en général dans le modèle liste ; le modèle final entraîne le plus souvent la fonction de guide du langage et donc la fonction de planification qui suit la fonction de guide. Nous avons montré que le modèle liste entraîne le plus souvent le mode d'expansion discursive accumulation tandis que, le modèle d'action final entraîne le pus souvent le mode d'expansion discursive substitution. Cette conclusion a été tirée, entre autres choses, sur la base des usages particuliers des unités linguistiques qui caractérisent les deux modes d'expansion discursive.

Annexes

Les occurrences de la fonction de guide et de la fonction de planification du langage seront signalées par des moyens typographiques : l'usage du caractère `Courier` et celui d'une bande.

Protocole de Camille et Gaëlle

<table>
<tr><td>Problème


[AB]diamètre du cercle
A, D et E sont des points du cercle
(AE) est perpendiculaire à (OD)
AO = AD
Montrer que AOED c'est un losange</td><td>Camille
Gaëlle
Classe Seconde</td></tr>
<tr><td>1 C: Camille
2 G: Gaëlle

3 C: t'as vu?
4 G: c'est quoi ce truc?
5 C: il faut écrire…nom et prénom
6 G: "AB diamètre du cercle "
7 C: "A, D, E sont des points du cercle " (elle les indique par un geste des doits sur la figure)</td><td></td></tr>
</table>

8 C: "AE est perpendiculaire à OD" "AO est…. " Ou là là	
9 G: ça est égal ça (*en indiquant AO et AD)* ça c'est un parallélogramme AO égal OE égal AD donc ça fait un parallélogramme	
10 C: mais un parallélogramme c'est pas les côtés cotés de la même longueur, c'est les côtés opposés qui sont….	
11 G: ouais, ouais, tu as raison …c'est un **losange**	
12 C: ouais, ouais, **pour un losange il faut dire que les diagonales se coupent dans leur milieu et ils sont perpendiculaires**	12. verbalisation du théorème pilote
13 C: le losange… les diagonales se coupent dans leur milieu	
14 G: et perpendiculaires	
15 C: Attend, perpendiculaires c'est bon là, en fait il faut dire que….	15. L'une des deux prémisses du théorème pilote a été toutes de suite vérifiée
16 G: En fait ce côté c'est le même que celui là *(AD et OE)*, hein, il faut dire qu'elles sont parallèles aussi …t'as jamais utilisé le triangle rectangle dans le cercle? Je ne sais plus *(elle trace le segment BE)*	
17 C: ouais, mais…..	
18 G: non …mais………	
19 C: mais oui, mais….. enfin …ce n'est pas la peine de dire qu'elles sont parallèles à partir du moment qu'on sait que c'est un quadrilatère où les diagonales se coupent dans leur milieu et perpendiculairement, dans ce cas là c'est évident qu'elles sont parallèles, non?	
20 G: ouais, et … si on fait comme ça…..	
21 C: ouais, mais dans ce cas là se coupent dans leur milieu 22 G: et comment tu peux savoir qu'elles se coupent dans leur milieu?	21. Fonction de GUIDE : re-verbalisation de la prémisse encore à vérifier. La fonction de guide est menée par Camille mais elle est adressée à Gaëlle
23 C: ben justement, c'est ce qu'on veut démontrer, non?	23. GUIDE
Silence …chuchotement…..	
24 G: *chuchote* A, D,O, attends, …ça… AO …DA.	

25 C: c'est trop chiant 26 G: regarde ce qu'on peut dire: que AEB c'est rectangle 27 … 28 C: oui, oui, mais ça sera bon? 30 G: on sait jamais ça peut toujours servir 31 C: mais ouais, ça c'est, tout ça c'est des données et tout… *elle indique la liste de données* 32 G: Attends, "A, D, E points du cercle, AE perpendiculaire et AO égal AD 33 C: ah, ouais, ce que tu veux dire c'est que….. 34 G: je ne sais pas si ça serve à quelque chose, mais on sait jamais 35 C: je ne sais pas……. 36 G: peut être on peut démontrer, …tiens regarde, ça c'est symétrique par rapport à ça (*AO et DE)* donc en fait c'est le même 37 C: et alors? 38 G: et après il faut qu'on puisse démontrer qu'il est parallèle à celui là	
39 C: ouais, mais ce qu'il nous faut c'est de dire que c'est le milieu là, ce truc, non?	39. GUIDE
40 G: ouais,	
41 C: c'est le milieu de ça et de ça *(de DO et de AE)*. Bon, super!	41. GUIDE
42 C: Attends, AO égal AD *(elle revient aux données codées sur le dessin)* … et si on prouve que le triangle DAO est isocèle,… parce que ça fait quelque chose, tu sais, par rapport à ça *(DO)* 43 G: ouais, parce que c'est la hauteur 44 C: ouais, c'est la hauteur 45 G: ouais, c'est aussi la médiane …AH OUI 46 C: ça veut dire, comme ça c'est la hauteur dans un triangle isocèle est aussi médiane donc……. on peut donner une lettre? (*le point du milieu est nommé H)* 47 G: on compare les triangles en fait	

48 C: on dit que c'est quoi? C'est …H 49 C: ADO isocèle HA est la hauteur car, attends …AE est perpendiculaire à OD 50 G: regarde les données 51 C: et aussi AE est perpendiculaire à OD alors AH perpendiculaire OD. Marque-le là dessus! On met *(elle écrit sur la feuille)*... Si ... il faut dire que AH, H est un point de la droite AE et AE perpendiculaire à OD donc ça veut dire que AH perpendiculaire DO … 55 C: AH hauteur du triangle ADO, et si AD égal DO... ah! t'as mit ...ADO isocèle car... 56 G: tu fais une flèche 57 C: oui, attend, je mets : car AO égal AD, et dans un triangle isocèle la hauteur est aussi médiane (*le disent les deux élèves ensemble)* 58 G: médiatrice? Médiane, là c'est 59 G: donc se coupent dans son milieu	
60 C: Ouais, `mais nous on a que le milieu de DO, il faut dire aussi, ... il faut trouver le milieu de AE....` *(Gaëlle parle en même temps)* et là on a la même chose: dans un triangle isocèle la hauteur est aussi médiane 61 C: j'ai mis : une médiane passe au milieu d'un côté... au milieu, non? 62 G: la médiane passe par le sommet... au fin... 63 C: la médiane passe par le milieu du côté qu'elle coupe ?! 64 G: donc tu mets, DH fin, H est le milieu de DO 65 C: Donc H est le milieu de DO, de Même .... à ouais, mais pour l'autre triangle il faut dire que... comment on sait que AO est égal OE, c'est donné ou... ? mais comment on sait que c'est égal ? 66 G: attends, ... parce que c'est un rayon du cercle 67 C: ah, oui! 68 G: donc voilà, 69 C: alors de Même, dans l'autre triangle AOE, AO est	60. Comme il y a la re-verbalisation de la prémisse encore à vérifier contextualisée lors du processus, nous reconnaissons ici la fonction de GUIDE. Ce qu'on a déjà prouvé est que AE coupe OD en son milieu, maintenant il faut prouver l'autre partie de la prémisse encore à vérifier : DO coupe AE en son milieu.

égal à EO car ces sont des rayons du cercle, et le triangle est donc isocèle 70 G: et... 71 C: et OH est la hauteur 72 G: issue de O 72 C: donc la médiane ... H milieu de AE donc là on met tu, attends alors je fais une flèche comme ça. On met: **H milieu de**.. 74 G: **AE et DO** 75 C: Attends je fais comme ça et après je mets un truc et je mets donc... 76 G: ouais, ok 77 C: H milieu de DO.. 78 G: Ouais, tu mets toutes les données. Tu mets aussi perpendiculaire 79 C: **AE perpendiculaire à DO** Attends je mets aussi que : **DO et AE sont les diagonales du quadrilatère ADEO** Je mets un segment... comme ça ... je ne sais pas! AE et DO... 80 G: un segment je pense	
81 C: (*elle écrit)* **et un quadrilatère où les ... dont les diagonales *(Gaëlle chuchote « se coupent »)* se coupent dans leur milieu** **82 G: perpendiculairement (*Camille écrit)*** **83 G: est un losange** **84 C: Donc ADEO est un losange, Voilà!**	81, 82, 83. verbalisation de l'énoncé du théorème pilote pour une raison de contrat

Protocole de Kévin et Jérémie

Soit (C) un cercle de centre O et de diamètre [AB], D un point de ce cercle tel que [AD] = [AO]. La perpendiculaire à (OD) passant par A recoupe le cercle (C) au point E. Démontrer que OADE est un losange. Justifiez soigneusement vos réponses	*Kévin* *Jérémie*

1 K: … de diamètre AB, mais attends, AO c'est un vecteur zéro 2 J : mais on n'a pas de vecteurs là dedans 3 K: *il lise l'énoncé* Soit C un cercle de centre O *Ils cherchent le compas, ils tracent le cercle* 4 K: de diamètre AB, et AD est égal à AO 5 J : ça c'est perpendiculaire sûrement 6 K : non, mais attends, AD ça doit être égal à AO, c'est pas AO égal DO 7 J : ça fait un losange en plus, donc c'est forcement perpendiculaire, je pense que les diagonales elles sont perpendiculaires … 8 OBS: moi je n'ai pas trop comprit quel est votre problème 9 J : placer le point D 10 K: mais attends…. 11 J: si tu avais un vrai compas… je vais prend le mien dans ma trousse 12 K : AD égal AO, par rapport de longueur 13 J: bien, mais oui, donc D *Il revient à l'énoncé* "la perpendiculaire à OD passant par A" 14 K: attends je trace… Donc la perpendiculaire elle passe sûrement par A 15 K : passant par A, génial, faut une équerre … Bien c'est à peu prés perpendiculaire 16 J: c'est pas très précis! 17. K :ouais, mais je ne peut pas faire autrement 18. J: je ne sais pas, fait les médiatrices, mais oui, les médiatrices ça coupent perpendiculairement 19. K : ouais mais… 20. J : ouais, t'est sure que c'est perpendiculaire ! 21. K : bien fais le parce que je ne sais pas faire ce genre de trucs 22. J: alors, oui, c'est bon; je prends un point comme ça. C'est claire que c'est pas facile à faire avec ça 23. K: tu t'es planté, je crois 24. J : attends je fais comme ça, comme ça…. 25. K : tu fais n'importe quoi !	Phase de construction du dessin (de l'intervention [1] à l'intervention [39])

26. J : pour quoi j'ai mit au milieu? Attends, c'est fait longtemps qu'on n'a pas faites les bissectrices ! les médiatrices…*les élèves sont en train d'effacer une partie de la construction* 27. K : de toute façon, on n'a pas besoin que soit un truc super perpendiculaire! Ça serve à rien 28. J: c'est mieux de le faire précis 29. K : ça serve à rien de faire deux points, parce que t'as déjà A 30. J : ouais, mais bon, ou moins tu es sur que c'est perpendiculaire. ******************************** 31. K : "recoupe le cercle C au point E" "démontrer que OADE est un losange" 32. J : il y a plusieurs justifications 33. K : si tu l'as 34. J : déjà il y a les diagonales qui se coupent dans leur milieu et qui sont perpendiculaires 35. K : t'es sure qui se coupent dans leur milieu? 36. J : non, ça faudrait prouver ça, mais perpendiculaires ça c'est sur ! 37. K : donc t'as fait bissectrices ou médiatrices? 38. J : Médiatrices, bissectrices ça coupe l'angle en deux, moi… 39. K : si tu as fait médiatrice, dans ce cas là c'est sur qui se coupent dans leur milieu 40. J : ouais, l'angle il le coupe au milieu quand même, mais bon, ………… Alors, démontrer que c'est un losange…; 41. K : [---] c'est un parallélogramme, je croyais que c'est un parallélogramme 42. J : les cotés opposés sont parallèles, et ça c'est un rayon *(OE)* On sait que c'est un parallélogramme, il faut prouver que c'est un losange justement, c'est un parallélogramme spécial. Bon alors, pour prouver que ces cotés sont parallèles …	

Ben AD égal AO, AO c'est le rayon et EO c'est un rayon du cercle donc forcement AD il est parallèle 43. K: pourquoi forcement ? 44. J : ben, non égal égal	
45. K : **si les diagonales sont perpendiculaires et elles se coupent dans leur milieu c'est un losange**	45 et 47. Verbalisation de l'énoncé du théorème pilote
46. J : En tout cas, on sait que AD est égal à OE parce qu'on sait … **47.** K : mais tu n'as pas besoin de prouver que c'est un parallélogramme, tu dis que c'est **un quadrilatère dont les diagonales se coupent dans leur milieu et elles sont perpendiculaires, et c'est un losange** 48. J : mail il faut prouver 49. K : oui, mais t'as pas besoin de dire que c'est un parallélogramme d'abord 50. J: ha oui, mais bien, ouais… Mais dans un losange de toute manière c'est parallèle 51. K : oui oui	
52. J : mais il faut prouver par rapport aux diagonales, dans ce cas là	52. GUIDE mené par l'élève qui n'a pas ni évoqué ni verbalisé le théorème pilote
53. K : donc, attends les diagonales c'est AE et DO… 54. J : ou alors, OD c'est sur que c'est un rayon 55. K: déjà on sait que OD est perpendiculaire à AE puisque 56. J: mais ça arrêt de le dire 57. K: mais j'ai pas marqué [---] donc OD est perpendiculaires à AE *58.* J : comme ça on le sait, c'est marqué 59. K: comme ça c'est une certitude, sans plus besoin de démontrer	
60. J : bien c'est surtout qui se coupent dans leur milieu Attends on réfléchit deux minutes avant de… *AO = AD*	60. GUIDE
61. J: OD est perpendiculaires à AE 62. K : mais d'accord…. on sait 63. OBS: qu'est ce que vous savez en fin	
64. J : donc, AE est perpendiculaire à	64.GUIDE

OD et on cherche à prouver que bien que se coupent au milieu quoi …………	
65. J : il y a peut être un truc avec les vecteurs	
66. K : ouais, mais en plus je ne me rappel plus, je ne me rappel plus des propriétés. Je pense à un point qui est égal à EA [---] quelques choses, je ne rappel plus…	
67. J : t'as fait une médiatrice de quoi là, de OD?	
68. K : ouais, ha ouais ! , on c'est que c'est AE c'est forcement le milieu de OD dés qu'on a tracé la bissectrice et que la bissectrice se coupe le segment e son milieu	
69. J : non, la médiatrice!	
70. K : la médiatrice ça coupe le segment en son milieu et perpendiculairement	
71. OBS: mais c'est toi que tu l'as tracée	
72. K : quoi?	
73. OBS : c'est toi qui l'as tracé comme ça, tu l'as construite mais tu ne l'as pas montré, tu ne l'as pas démontré	
74. K : mais on peut dire : si on trace la bissectrice ça coupe bien, ça passe bien par le point A hein! Et ça coupe perpendiculairement	
75. OBS: mais tu l'as faite pour la construction, comme ça marchait bien le	
76. truc de la perpendiculaire…	
77. K : on n'a pas que les vecteurs	
78. J : ouais je pense	
79. K : …Le vecteur AO parce que le vecteur AD c'est fait par hasard …attends AC plus AD … tu te rappel? AD plus AC ça faisait deux AI et AI ça représentait quoi déjà?	
80. J : AI c'était le milieu	
81. K : ouais c'était le milieu, et ça faisait deux AI donc…hein bien que le vecteur serait pas comme ça,	
82. J: c'est prouvé que c'est bien le milieu de *(AE)* … par contre on fait pareil pour OD, attends il faut d'abord signer les vecteurs	
83. OBS: vous faites quoi?	

84. K : on fait des vecteurs AO et AD. On sait que…dans la leçon on avait dit que il y avait que AB plus AC ça faisait deux….. *Ils cherchent le cours sur les vecteurs* …… 85. J : ouais, il faut prouver que justement ça c'est le milieu de … il faut d'abord commencer par OD mais bon si on prouve OD après serait facile on pourrait faire le truc des vecteurs …prouver que ça c'est le milieu de… donne un angle là haut 86. K : c'est con hein! On puisse passer à la même médiatrice 87. OBS : c'est ça qu'il faut trouver….. en fait, tu la vois comme médiatrice *88.* K : je ne sais pas, il coupe le segment d'origine (*il marque I point du milieu du segment DO)* 89. OBS : en fait tu l'as construite, mais comment tu l'as fait? 90. K : je l'ai fait avec le compas et tout, mais franchement ça m'aiderais bien, ça serait très facile avec la médiatrice Est- ce que je peut dire: je trace la médiatrice… parce qu'il faut que la droite passe par A et coupe I perpendiculairement 91. J : attends 92. OBS : oui, mais attends je trace sur la feuille un segment et un autre segment qui est perpendiculaire au premier *OBS trace deux segments perpendiculaires qui ne se coupent pas dans leur milieu* *OBS nomme avec H le point d'intersection des segments* ben voilà elles sont perpendiculaires, faite moi confiance *(le dessin n'est pas trop précis),* mais là le point H n'est pas du tout au milieu 93. K : oui, justement nous on l'a appris, la médiatrice coupe le segment dans son milieu 94.J : la médiatrice c'est perpendiculaire et ça coupe le segment en son milieu	 85. GUIDE

95.OBS : ouais, mais pour quoi c'est une médiatrice? 96.K : pour quoi? 97.J : ben pour quoi ? 98.K : c'est ça que je ne comprends pas, pour quoi c'est une médiatrice? 99.OBS : tu dis: c'est une médiatrice parce que c'est perpendiculaire, en fait je viens de montrer qu'il y a une perpendiculaires qui n'est pas médiatrice	
100. K : pour quoi la médiatrice… Parce que c'est perpendiculaire… mais ouais, c'est vrai… Parce que c'est le milieu, il faut prouver le milieu c'est ça. On peut faire ça avec les angles, non? 101. J : les angles? On ne les connaît pas, là! 102. K : ouais, c'est chient là, mais attends en partant par-là c'est 90…. Il faudrait… en plus! 103. J : moi je ne comprends pas ce que tu veux faire avec les angles	100.GUIDE accompagnée par un projet. En effet, l'intervention est conduite par Kévin, c'est-à-dire l'élève qui a proposé le théorème pilote
104. K : si on prouve que celui là est égal à celui là (*DAI et IAO)* et si on prouve ça on sait que c'est le milieu donc la droite là c'est une bissectrice de l'angle aussi, prouver que les angles ici sont égaux, comme ça on sait que c'est le milieu 105. J : ouais, parce qu'il est isocèle, si non c'est pas vrai 106. K : ouais mais je sais, il faudrait que…c'est ça qu'il faut prouver il nous manque juste un angle	104. Verbalisation d'un théorème pilote. Fonction de planification pour vérifier la prémisse « AE coupe OD en son milieu »
107. OBS : il est comment … 108. K : il est isocèle le triangle ADO parce qu'il a deux cotés de même longueur 109. J : c'est sur, c'est le rayon 110. K : mais de toute façon il dit de construire AD égal à DO donc c'est forcement isocèle	107. GUIDE par rapport au théorème pilote proposé en [106]
111. K : mais attends, ils sont équilatéraux, regard! Parce que ça c'est un rayon, ça c'est un rayon et ça c'est égal au rayon (*DO = OA = AD)* et celui là… je ne sais pas… **DE il faudrait le prouver aussi. Parce que dans un losange les quatre cotés sont égaux. On peut essayer de prouver ça aussi.**	111. GUIDE accompagnée par un projet en suivant le théorème pilote verbalisé en [106]

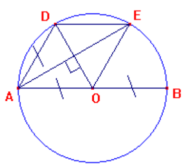
112. J : déjà tu mets OE = AO = AD = OD *ils écrivent* car AO et OD sont des rayons donc ils sont égaux 113. J : et AD égal AO comme c'est marqué 114. K : AD est égal OA … DE il faudrait prouver, ça serait pas mal de le prouver 115.J : OE c'est aussi un rayon, puisque E appartient à C, c'est marqué là et O c'est le centre du cercle 116.K : ouais, EO c'est sur, de toute façon tu point sur le cercle et tu regard EO c'est un rayon 117.J : mais il est marqué... attends tu ne met pas là, tu mets ici…. 118. K : voilà c'est bon, maintenant il faudrait DE, mais c'est sur que c'est un triangle équilatéral mais comment prouver ça? 119.OBS : le quel? 120.K : ODE 121.OBS: pour quoi? 122.K : ben voilà c'est sur mais il faudrait prouver que celui il est égal à ceux-là, ces deux là sont des rayons donc ils sont forcement égaux mais…. *Silence* Attends ceux deux là sont parallèle, DE est parallèle à AO On est parti par l'histoire d'angle… L'angle DAI et IAO sont égaux comme ça on sait que ça coupe au milieu, il nous manque un angle 123. OBS: mais tu as bien dit que DOA c'est équilatéral, et ça veut dire quoi? 124. K: bein qui sont tous le même angle, ah, oui!! Ça fait 60, 60 et 60 125. J : ça fait 60+60 ça fait…. 126. K : 60°, je peux marquer c'est sur parce que comme il est équilatéral ils sont tous le même angle… et 60 fois 3 ça fait 180 et on sait que les angles d'un triangle ça fait 180°, Voilà Donc maintenant 90 plus 60 ça fait 150, et là 30 donc ben bon ils sont bien égaux	114. et 118. L'élève veut réutiliser pour le triangle DEO la même stratégie qu'il a utilisé pour le triangle OAD : le triangle DEO est équilatéral 149. GUIDE 150. GUIDE 152. GUIDE 154. GUIDE et Projet par rapport au théorème pilote verbalisé en [45] et [47]

129. J : marque le parce que c'est pas finit *ils écrivent* 180°-150°= 30° 130. K : Et l'autre c'est pareil *(IAO et IAD)* donc on peut bien dire que cette droite coupe en deux l'angle DAO en son milieu donc on peut dire que la droite AE c'est la bissectrice de cet angle et comme on sait qui passe par ça… mais attends 131. J : déjà tu mets : comme le truc ... là "Comme AE coupe DAO en son milieu, on peut dire que c'est la …." 132. J : la médiatrice 133.K: la bissectrice 134.J : la médiatrice, t'as pas besoin de répéter que c'est la bissectrice 135.K : ouais mais c'est la bissectrice de l'angle, une droite que coupe en deux un angle c'est la bissectrice 136.J : ouais c'est ce que tu viens de marquer! 137.K : je ne l'ai pas marqué 138.J: attends, tu dis que ça coupe dans son milieu, tu ne va pas mettre en plus que c'est la bissectrice 139. K: non, la bissectrice ça coupe un angle dans son milieu 140. J : ouais, mais tu mets trop de mot là, je ne sais pas pour quoi tu t'emmerde à mettre tout ça Coupe dans son milieu donc c'est la bissectrice 141. K : on s'enfiche, mais bon alors, maintenant qu'on sait que c'est la bissectrice…. 142. J : dans un triangle équilatéral se coupent les cotés d'enfance dans leur milieu 143. K : ben oui, c'est comme la hauteur en fait … la médiatrice en fait, dans un triangle équilatéral la hauteur et la médiatrice c'est pareil 144. J : tu mets "dans un triangle équilatéral la médiatrice d'un angle 145. K : non, c'est la bissectrice d'un angle, 146. J : oui, la bissectrice d'un angle est la médiatrice du côté opposé 147. K: ben voilà c'est un losange 148. J: comme AE, c'est une droite je crois	

149. K : ouais, mais moi je mit segment, mais c'est pas grave "AE est médiatrice de OD 150. J : alors AE est perpendiculaire OD 151. K : OD attends, ben AE coupe... 152. J : " AE coupe OD dans son milieu I" 153. K : et perpendiculairement, on sait que I c'est bien le milieu de OD 154. J : on sait que I c'est bien le milieu de OD, maintenant il faut prouver que c'est…. que I c'est bien le milieu de AE. Justement il faudrait prouver que DE c'est égal à ça comme ça on peut dire que c'est un triangle équilatéral et on peut faire la même chose 155. J : c'est un triangle équilatéral qui a exactement les même cotés de celui-là 156. K : ouais, et après on dit que c'est la même chose que ADO et voilà, et après c'est un losange 157. J : mais attends pour DE franchement je ne sais pas comment faire 158. K : on va réfléchir *Silence* 159. K: avec les vecteurs ça pas mal là -------------- 160. J : soit A, D E … 161. K : regards, on peut faire comme ça, on sait que ceux deux là sont égaux OE et OD, je sais pas si ça marcherait, mais c'est une supposition 162. J : non, mais regards il faut prouver que c'est 2* AI donc que ça c'est le milieu 163. K : ben oui, c'est bon on sait 164. J : on sait que A, D et E sont trois points quelconques 165. K : non, mais on sait que, regard AO plus AD c'est égal à deux AI donc c'est vrai 166. J : non, il faut mettre "soit A, D, E et I milieu de DO…. 167. OBS: alors, expliquez-moi !	175. re verbalisation de l'énoncé du théorème pilote par effet du contrat

168. K : donc en fait comme on a trouvé que I c'était le milieu de DO et sur notre cour, sur les vecteurs on a marqué que AO plus AD c'est égal deux AI 169. J : attends, à condition que I c'était le milieu 170. K : ben oui, c'est ce que j'ai dit "on sait que I c'est le milieu de….", donc maintenant on sait que AO lus.. vecteur AO plus vecteur AD c'est égal à deux fois vecteur AI ça nous arrange comme I c'est le milieu de OD ben AI est égal IO. Bon tu marque Et après bon, on a finit 171. J : "donc AO + AD = 2 * AI = AE donc AI = la moitié de AE, I milieu de AE 172. K : voilà 173. J: alors un quadrilatère 174. K : mais là tu parle de quoi? 175. J: ben je prouve que c'est un losange **Un quadrilatère dont les diagonales sont perpendiculaires et elles se coupent dans leur milieu, est un losange**	

Protocole de Vito et Davide

 AB diametro del cerchio O centro del cerchio A, D ed E sono punti del cerchio AE è perpendicolare ad OD AO = AD Dimostrare che OADE è un rombo	Vito Veneri Davide De Vincenti IIID
1. D: AB diametro del cerchio, quindi ….. Scusa Betta ma noi dobbiamo considerare AB come avente una ipotetica misura o lo dobbiamo considerare in generale?	

2. B: niente misure 3. D: allora AO = ½ AB perché è il raggio Se OADE è veramente un rombo, allora i lati devono essere tutti congruenti Allora AO=AD=DE=EO 4.V: ma aspetta un attimo, AO=172AB…vediamo di capire AO perché raggio del cerchio 5.D: scrivilo qui a fianco. Prof? Ma questi trattini qui (*le codifiche di AD=AO=OB)*vuol dire che è già segnalata la congruenza? Questo, con questo con questo? Prof: si 6.D: allora **noi abbiamo già che questa è una delle condizioni per il rombo (*AO=AD=DE=EO*)** Però **potrebbe essere anche le diagonali congruenti che si tagliano a metà** 7.V: ma aspetta un attimo, è già cosi, scusa! (*le diagonali che si tagliano scambievolmente in due parti uguali*) Prof: discutete fra di voi	
8.V: ma **per il rombo basta che tutti e quattro i lati siano uguali**	8.Verbalisation du théorème
9.D: **oppure che le diagonali si taglino a metà e che siano perpendicolari.** Io procederei …..	9.Verbalisation du théorème
10.V: vediamo cosa abbiamo: abbiamo che AO è uguale a r e abbiamo anche che EO è uguale a r quindi abbiamo che OE = AO e quindi ci troviamo già con due cose note. Ora bisognerebbe magari dimostrare che DE magari è uguale a AO oppure che siano paralleli 11.D: io farei così: intanto direi che AO è uguale alla misura di AD per ipotesi 12.V: io direi anche un'altra cosa, … 13.D: aspetta, e poi direi che è OE è uguale ad AO perché raggio 14.V: ma pensa, anche la diagonale minore DO è uguale ai lati, perché comunque è un raggio	
15.D: io invece farei una cosa così. Dato che noi abbiamo qui un angolo retto segnato, l'incrocio delle diagonali, sappiamo già che le diagonali sono perpendicolari, allora noi con i triangoli possiamo guardare se sono anche uguali, se si tagliano veramente a metà scambievolmente. Quindi io già segnerei che le diagonali sono perpendicolari (scrive : le diagonali sono ⊥ Per Hp)	15.Fonction de guide et fonction de planification
16.V: ma non si potrebbe Avere un libro per controllare quali sono le condizioni..	

Distribution des problèmes parmi les binômes engagés dans l'expérimentation

Tableau 7.3

Distribution des problèmes parmi les 14 binômes d'élèves

	1	**2**
A	3	3
B	4	2
3	6	

Tableau 7.4

Les problèmes résolus par chaque binôme

BINOMES D'ELEVES	PROBLEMES 1 et 2	PROBLEME 3
Taina /Sophie	B1	
Kévin /Jérémie	A1	
Camille /Gaëlle	B1	X
Olivier / Djamel	A1	X
Hana / Christelle	A2	
Elena /Barbara	A1	
Elena / Alessandra	B1	
Vito / Davide	B1	
Luca / Elena	B2	X
Luca / Alessandro	B2	
Elena / Adam	A2	
Andrea / Luca	A2	X
Simone / Alice		X
Lucia / Marta		X

CHAPITRE VII

PERSPECTIVES DIDACTIQUES : RÔLE DES VARIABLES ET FONCTIONS DU LANGAGE

0. Introduction

Dans ce chapitre nous proposons une analyse a posteriori de l'expérimentation pour en tirer des perspectives didactiques à partir des résultats de cette expérimentation. Ces perspectives se dégagent de l'analyse d'une part de l'influence sur le processus de résolution des valeurs des variables que l'on a fait varier lors de la définition des problèmes de notre expérimentation, d'autre part des fonctions du langage mises en œuvre lors des processus de résolution.

1. Rôle des variables

Rappelons que les variables prises en charge dans notre expérimentation sont au nombre de deux : la forme dans laquelle le problème est proposé, et la forme dans laquelle les données sont fournies.

1.1 Rôle de la variable « forme dans laquelle le problème est proposé »

Il s'agit d'analyser le rôle joué par la forme du problème lors des processus de résolution : seul énoncé ou Liste de données accompagnée d'un dessin. Ainsi, nous analyserons dans quelle mesure la forme des problèmes exerce une influence sur les fonctions du langage que les élèves mettent en œuvre lors du processus de résolution.

Le choix de la forme du problème a été guidé par deux idées :

- l'énoncé seul a tendance à induire la construction du dessin par les élèves, tandis que la liste des données accompagnées d'un dessin, induit plutôt en premier l'interprétation du dessin fourni. Cette hypothèse a été confirmée suite à l'analyse des protocoles.
- L'énoncé seul était supposé favoriser le retour à l'énoncé tandis que le dessin

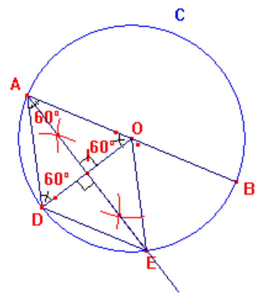
accompagné de la liste devrait favoriser le retour au dessin.

C'est pourquoi, nous choisissons d'analyser aussi l'incidence de la construction du dessin sur la solution, dans les problèmes A, et l'incidence de l'interprétation du dessin fourni, dans les problèmes B. L'interprétation du dessin sera en fait abordée à l'occasion de l'interprétation du codage puisque le dessin fourni est codé (cf. paragraphe 1.1.3). Nous aborderons ensuite comment la production du codage ou l'interprétation du codage influent sur le processus de démonstration.

1.1.1 Influence de la construction du dessin sur la solution

Dans quelle mesure la construction du dessin influe-t-elle sur l'évolution du processus de démonstration ?

Nous avons observé dans le processus de résolution des élèves que la construction du dessin semble être une source d'informations. Plus précisément, la construction du dessin faite au moyen d'instruments (règle, compas ou équerre) conduit les élèves à considérer certaines propriétés utilisées pour la construction comme propriétés utilisables aussi pendant la démonstration bien qu'elles n'aient pas été démontrées. Par exemple, la construction du segment [AE] perpendiculaire à [OD] dans le protocole de Kévin et Jérémie (Problème A 1), est faite au moyen du compas en s'appuyant sur le processus de construction géométrique de la médiatrice, comme le montre la reproduction du dessin des élèves ci-contre et l'extrait ci-dessous. Comme la médiatrice de [OD] permet d'avoir la perpendiculaire à [OD], Jérémie construit la médiatrice au segment [OD] sans se poser la question si elle passe par A. Dès qu'il a fait le dessin, la médiatrice du segment [OD] passe perceptivement par A, donc la question (la médiatrice passe par A ou non) n'est plus abordée. En conséquence, la propriété « AE est médiatrice de OD » utilisée pour la construction de la perpendiculaire, est aussi utilisée lors du processus de résolution sans être spontanément démontrée.



15 K : passant par A, génial, <u>faut une équerre</u> … Ben c'est à peu près perpendiculaire *(tracé à main levée)*
16 J: c'est pas très précis!
17. K :ouais, mais je ne peux pas faire autrement
18. J: je ne sais pas, <u>fais les médiatrices</u>, mais oui, <u>les médiatrices ça coupe perpendiculairement</u>
19. K : ouais mais…
20. J : ouais, t'est sûr que c'est perpendiculaire !
21. K : ben, fais le parce que je ne sais pas faire ce genre de trucs
…….

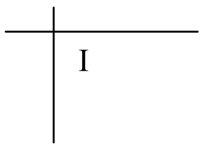
26. J : pourquoi j'ai mis un milieu? Attends, ça fait longtemps qu'on n'a pas fait les bissectrices ! les médiatrices…..
27. K : de toutes façons, on n'a pas besoin que soit un truc super perpendiculaire! Ça sert à rien
28. J: c'est mieux de le faire précis

…………………
35. J : donc, AE est perpendiculaire à DO et on cherche à prouver que ben, que se coupent au milieu quoi,
….
44. J : t'as fait une médiatrice de quoi là, de OD?
45. K : ouais, ha ouais! , c'est que c'est AE c'est forcément le milieu de OD dès qu'on a tracé la bissectrice et que la bissectrice coupe le segment en son milieu
46. J : non, la médiatrice!
47. K : la médiatrice ça coupe le segment en son milieu et perpendiculairement

L'observateur demandera aux élèves de démontrer la propriété utilisée « AE est perpendiculaire à OD donc AE est médiatrice de OD », mais on verra que les élèves ont des difficultés à comprendre la nécessité de démontrer cette propriété puisqu'elle est perceptivement évidente pendant la construction du dessin. Remarquons de plus que les élèves font appel à la précision de la construction du dessin pour reconnaître sur le dessin des relations géométriques.

50. Ob : c'est toi qui l'as tracé comme ça, tu l'as construite mais tu ne l'as pas démontré
….
63. J : ouais, il faut prouver que justement ça c'est le milieu de … il faut d'abord commencer par OD mais bon si on prouve OD après serait facile on pourrait faire le truc des vecteurs …prouver que ça c'est le milieu de… donne un angle là haut
64. K : c'est con hein! On peut passer à la même médiatrice
65. Ob : c'est ça qu'il faut prouver….. en fait, tu la vois comme médiatrice
66. K : je ne sais pas, il coupe le segment d'origine (*il marque I milieu du segment DO)*
67. Ob : en fait tu l'as construite comme ça !
68. K : je l'ai fait avec le compas et tout, mais franchement ça m'aiderait bien, ça serait très facile avec la médiatrice
Est-ce que je peux dire: je trace la médiatrice… parce qu'il faut que la droite passe par A et coupe I perpendiculairement
70. J : attends
71. Ob : oui, mais attends je trace sur la feuille un segment et un autre segment qui est perpendiculaire

Ob trace deux segments perpendiculaires qui ne se coupent pas en leur milieu



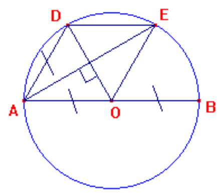
Ob nomme I le point d'intersection des segments
Bien voilà ils sont perpendiculaires, mais là le point I n'est pas du tout au milieu
73. K : oui, justement nous on l'a appris, la médiatrice coupe le segment dans son milieu
74. J : la médiatrice c'est perpendiculaire et ça coupe le segment en son milieu
75. Ob : ouais, mais pourquoi c'est une médiatrice?
76. K : pourquoi?
77. J : bien pourquoi ?

78. K : c'est ça que je ne comprends pas, pourquoi c'est une médiatrice?
79. Ob : tu dis: c'est une médiatrice parce que c'est perpendiculaire, en effet je viens de montrer qu'il y a une perpendiculaire qui n'est pas médiatrice
80. K : pourquoi est médiatrice ? …. Parce que c'est perpendiculaire… mais ouais, c'est vrai…

Parce que c'est le milieu, il faut prouver que le milieu c'est ça.
On peut faire ça avec les angles, non?

81. J : les angles? On ne les connaît pas, là!
82. K : ouais, c'est chiant là, mais attends en partant par-là c'est 90…. Il faudrait… plus!
83. J : moi je ne comprends pas ce que tu veux faire avec les angles
84. K : si on prouve que celui là est égal à celui là (les angles *DAI et IAO)* et si on prouve ça on sait que c'est le milieu donc la droite là c'est une bissectrice de l'angle aussi, prouver que les angles ici sont égaux, comme ça on sait que c'est le milieu
85. J : ouais, parce qu'il est isocèle, si non c'est pas vrai

Par contre, nous avons observé que, lorsque les élèves construisent à main levée le dessin, ils n'utilisent dans le processus de démonstration que des propriétés déjà prouvées, même si elles ont été prises en charge pour la construction (Cf. protocole de Elena et Barbara, Problème A1)[1].



Phase de construction du dessin
E: on va tracer…voyons AO et AD comme ça
B : on va le marquer (*pour indiquer leur égalité*)
E : puis la perpendiculaire à OD…passant par A
B : on va marquer les angles égaux (*ADO et AOD*)

Processus de démonstration

E : ben oui, ils sont égaux à 90°, puis voyons, ce triangle est forcement isocèle car il a deux cotés égaux OA et AD. Donc voyons…on pourrait dire ….[l'angle] AOK égal à [l'angle] DKE….

Une autre conséquence de ce constat porte sur la différence entre la construction réalisée à l'aide des instruments et la construction réalisée à main levée. Contrairement à notre hypothèse a priori, la construction avec les instruments ne consiste pas à mettre l'accent sur le procédé mais que sur le produit. En effet, la précision des dessins produits à l'aide des instruments ne met pas nécessairement en évidence les liens explicites entre gestalts et théorie, mais plutôt des manipulations « naturalisées » de l'instrument.

[1] E. Facciamo una cosa del genere di … AO e AD
B: e li abbiamo segnati
E: poi la perpendicolare a OD
B: OD cosa è
E: quello lì, passante per A,
B: segniamo gli angoli così ce lo ricordiamo

E: si sono uguali a 90 gradi, poi vediamo, questo è per forza un triangolo isoscele perché ha due lati uguali OA e AD. Quindi vediamo…. Allora, potremmo fare una…. Tipo AOK e confrontare con DKE. Questi sono uguali (*gli angoli al vertice K)*

Nous avançons l'hypothèse que les techniques d'usages des instruments sont naturalisées au sens de Chevallard (1995). Cela signifie que les instruments « enferment » les propriétés géométriques sur la base desquelles ils fonctionnent mais les élèves ne sont pas capables de les remettre en cause pendant le processus de résolution. Par exemple, la construction d'une droite perpendiculaire à un segment donné à l'aide des équerres passe par la propriété « si deux droites sont parallèles, toutes les droites perpendiculaires à l'une, sont perpendiculaires à l'autre aussi ». En général, nous pouvons raisonnablement imaginer que cette propriété est souvent utilisée par des élèves pour des constructions géométriques mais qu'elle n'est presque jamais explicitée pendant le processus de construction.
La construction du dessin pour e problème 2 n'a pu être réalisée qu'à main levée ou par tâtonnement, comme expliqué au chapitre IV, puisque la construction du parallélogramme nécessite de fait de résoudre le problème même. Donc le problème d'usage des propriétés utilisées pour la construction n'est pas apparu.
Le problème 3 ne se prête pas à l'utilisation de propriétés en acte pour la construction du dessin donc le phénomène cité ci-dessus n'est pas apparu.

1.1.2 Influence de la variable forme du problème sur le retour à l'énoncé

La question que nous abordons maintenant, est le retour à l'énoncé pendant le processus de résolution suite aux valeurs prises par la variable « forme du problème ».
Puisque de nombreuses études montrent que le dessin est considéré souvent comme la source principale de données pendant le processus de démonstration, au sens que les élèves reviennent davantage au dessin pour en tirer des informations utiles plutôt qu'à l'énoncé, nous avions avancé a priori l'hypothèse que le retour à l'énoncé du problème serait peut être plus fréquent dans la version du seul énoncé plutôt que dans la version de la liste de données accompagnée d'un dessin.

Nous avons observé que certains binômes dans le cas des problèmes proposés comme « seul énoncé », ont recours à l'énoncé comme source de données nécessaires à la démonstration. Le retour à l'énoncé sert à :

- prouver des propriétés tirées de l'appréhension perceptive ou opératoire du dessin, par exemple à démontrer que le triangle OAD est un triangle équilatéral
- récupérer des données qui prouvent directement les prémisses de l'hypothèse du théorème pilote, par exemple que les diagonales AE et OD sont perpendiculaires.

Mais nous avons remarqué aussi que tous les binômes qui ont eu recours à l'énoncé lors du processus résolvaient le problème A1 (2 binômes sur 3), tandis qu'il n'y a pas eu de retour à l'énoncé lors du processus de résolution du problème A2 (aucun des 3 binômes concernés n'a eu recours à l'énoncé A2). Cela nous apparaît raisonnable si on considère que dans l'énoncé du problème A2 les données sont concentrées dans le mot « parallélogramme » : il est inutile de rechercher des données explicites là où il n'y a pas ! De même, nous n'avons pas remarqué de recours à l'énoncé pour le problème 3. Cela nous semble pertinent du fait que l'énoncé du problème 3 ne retient pas de données explicites par rapport aux questions posées.

Dans les cas où nous n'avons pas remarqué de retour à l'énoncé du problème, certaines relations données dans l'énoncé ont pourtant été démontrées par les élèves au cours du processus comme si elles n'étaient pas données. Ainsi, la perpendicularité de AE et OD est-elle démontrée par le fait que la médiane d'un triangle isocèle est aussi hauteur.

L'analyse montre que, dans le cas du problème proposé comme Liste de données accompagnées d'un dessin, il se peut que les élèves reviennent sur la liste pendant le processus, mais l'objectif est souvent celui de construire une nouvelle liste d'informations. À la liste de données fournies, on va ajouter d'autres informations obtenues par appréhension opératoire et discursive du dessin. Le retour à la liste de données sert rarement à prouver des prémisses du théorème pilote (ou à valider un pas de déduction) car, le plus souvent, ces données sont récupérées directement du dessin codé (« AE $\perp$ OD » ou « AO=AD »). L'élaboration des données et le recueil des nouvelles informations passe ici presque entièrement par l'interprétation du dessin et, de façon particulière, par l'interprétation du codage, car le dessin fourni est codé.

Le tableau suivant (page 253) distingue dans l'ensemble des binômes ceux qui ont eu recours de ceux qui n'ont pas eu recours à l'énoncé ou à la liste de données lors du processus de résolution. Pour les binômes en grisé le recours à la liste de données ne s'exerce que comme simple transcription de données afin de construire une liste d'informations, les autres binômes ont eu recours à l'énoncé ou aux données à des fins de déduction.

Tableau 7.1
Les binômes accompagné d'un * ont résolu le problème dans le domaine de la géométrie analytique

	ENONCE	**LISTE DONNEES + DESSIN**
Retour à l'énoncé ou à la liste de données pendant le processus	Olivier / Djamel - A1 Kévin / Jérémie - A1	Elena / Alessandra - B1 (pour construire une liste) Camille / Gaëlle - B1 (pour construire une liste) Luca / Alessandro - B2 (pour construire une liste)
Pas de retour à l'énoncé ou à la liste de données pendant le processus	Elena / Barbara - A1 Hana / Christelle - A2 Olivier / Djamel -3 Camille / Gaëlle -3 Elena /Adam* - A2 Andrea / Luca* - A2 Lucia/Marta*- 3 Simone/Alice * - 3 Luca/Elena * - 3	Vito / Davide - B1 Luca / Elena - B2 Taina / Sophie - B1 Luca / Alessandro - B2

La conclusion que nous pouvons tirer de ces constats est donc celle d'un retour faible à l'énoncé et à la liste de données dans tous les cas.

Même dans les problèmes proposés comme énoncé seul, le dessin reste la source la plus importante d'où tirer les informations utiles. De même que pour le dessin fourni, le dessin construit est toujours codé et le codage joue le rôle de mémoire (toutes les relations géométriques entre les unités figuratives du dessin que l'on peut coder, sont gardées sur le dessin). Donc notre hypothèse d'un retour à l'énoncé favorisé de la forme énoncé seul du problème ou d'un retour au dessin favorisé de la forme liste de données accompagnée d'un dessin a été infirmée.

Nous essayerons dans ce qui suit, de vérifier la validité des hypothèses avancées a priori sur la fonction du codage par rapport à la demande de démontrer.

1.1.3 Production et interprétation du codage

Dans l'expérimentation, il y a deux situations possibles concernant le codage du dessin : la production du codage sur un dessin que l'élève a construit, et l'interprétation du codage du dessin fourni comme donnée du problème.

1.1.3.1 Production du codage

Nous abordons maintenant le cas du dessin construit par les élèves avant toute résolution.

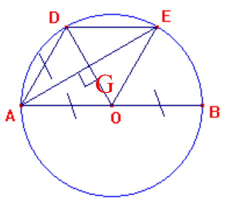
Est-ce que dans le cas énoncé seul les élèves codent d'eux-mêmes le dessin ?

Nous avons remarqué que les élèves codent sur le dessin construit les seules informations explicites dans l'énoncé. Il n'y a donc pas de codage maximal du dessin car le principe de congruence entre le codage produit et les données de l'énoncé est respecté. Les élèves construisent le dessin en suivant la séquence des données fournies dans l'énoncé et, comme prévu a priori, ils ne codent pas ce qui est perceptivement évident comme par exemple, la position des points E et D sur le cercle. Le segment [OD] construit pour indiquer la perpendiculaire au segment [AE] n'est pas codé comme rayon du cercle et cela confirme que le codage initial du dessin est strictement congruent aux données de l'énoncé.

Or, le codage minimal du dessin semble ne pas suffire au cours du processus de résolution, c'est pourquoi les élèves continuent de coder pendant le processus de résolution.

Nous avons pu observer un doublement du processus de codage en Italie. Des élèves, surtout en Italie, tout en codant le dessin, reconstruisent eux-mêmes une liste de données (précédemment démontrées) à côté du dessin dans laquelle figurent les données du problème. Ces données sont généralement transcrites par un langage symbolique du type :

(Elena / Alessandra - Problème B1 ; Vito / Davide – Problème B1)



AO=AD parce qu'est donnée

AO=OE parce qu'ils sont des rayons du cercle (C)

$\hat{G}=90°$ car $AE \perp DO$…..

Comme ce type de transcription symbolique est habituel en Italie, nous croyons que ce doublement du processus de codage est un effet du contrat.

Des élèves français se contentent d'ajouter des codages sur le dessin.

Est-ce que dans le cas du dessin accompagné d'une liste de données les élèves codent d'eux-mêmes le dessin lors du processus de résolution ?

Notre attention porte spécialement sur l'hypothèse avancée a priori par rapport au problème 2 (cf. paragraphe 4.3 du Chapitre IV) . Il pourrait se présenter un conflit entre le codage de la donnée « parallélogramme », appartenant à l'énoncé, et le codage des rayons OE et AO du cercle, suite aux appréhensions opératoire et discursive du dessin: les côtés AO et OE du parallélogramme sont de longueur différente et pour autant doivent être codés avec marques différentes, mais les mêmes segments [AO] et [OE], en tant que rayons du cercle, ont la même longueur et pour autant doivent être codés avec la même marque.

Nous n'avons pas le moyen de valider cette hypothèse. En effet, des cinq binômes auxquels le problème 2 a été proposé, trois ont résolu le problème en géométrie synthétique tandis que les autres l'ont résolu en géométrie analytique. Or, parmi les trois binômes qui ont utilisé la géométrie synthétique, deux ont résolu facilement le problème (environ 17 tours de parole), le troisième n'est pas arrivé à déduire l'égalité des rayons mais il a explicité les propriétés caractérisant le parallélogramme. Dès que la relation d'égalité entre AO et OE, due au fait qu'ils sont des rayons, est mise en place, la conclusion « le quadrilatère est un losange » est démontrée sans aucun conflit car sans mise en place d'un codage du parallélogramme. En outre, nous avons observé que les deux binômes (Luca / Elena ; Luca / Alessandro) qui ont résolu facilement le problème en géométrie synthétique n'ont utilisé aucun codage.

Or, cela est en contradiction apparente avec ce qu'on vient de dire sur la présence du codage (le codage est presque toujours présent). Il est vraisemblable de penser que, les élèves ayant résolu le problème en peu de temps et très facilement n'ont eu besoin ni d'un support de mémoire, ni d'un support de mémoire sélective. Le processus de résolution mené par ces élèves ressemble au développement d'un processus mené par des experts en train de résoudre un problème très facile pour eux. Nous pouvons donc conclure que, lorsque les informations à garder pour l'avancement du processus ne sont pas nombreuses, et lorsque le problème n'est pas « difficile » pour les élèves, il semble que le codage perde son utilité en absence du besoin de mémoire et de mémoire sélective.

En général le dessin est toujours codé (avec plus ou moins de codage) et dans le cas d'un codage faible, les informations sont écrites dans le registre d'écriture symbolique. Nous verrons dans la suite comment ces deux types de codage exercent des influences différentes dans le processus de résolution.

1.1.3.2 Interprétation du codage

Nous avions avancé a priori trois hypothèses concurrentes sur la fonction du codage par rapport à la demande de démontrer. La première hypothèse considère que les seules informations utilisables dans la démonstration sont celles codées ; la deuxième hypothèse considère les informations codées sur le dessin ainsi que d'autres relations fournies dans l'énoncé comme utilisables dans la démonstration ; la troisième hypothèse considère les informations codées sur le dessin ainsi que d'autres relations lues sur la figure comme utilisables pour la démonstration

Les résultats obtenus suite à l'analyse des protocoles montrent que les élèves prennent en

charge les informations codées sur le dessin (données de l'énoncé ou bien démontrées pendant le processus de résolution) et qu'ils prennent en charge aussi les informations démontrées pendant le processus mais qui ne sont pas nécessairement codées (par exemple, lorsqu'il n'est pas possible de les coder, voir côtés parallèles). Le plus souvent, les élèves codent sur le dessin les relations entre unités figurales qu'ils ont démontré et cette procédure semble être commune à presque tous les processus de résolution. L'hypothèse 1 n'a été ainsi que partiellement infirmée car les élèves semblent préférer coder les informations sur le dessin mais seulement s'il est possible de le faire. L'hypothèse 2 a été infirmée car, comme on vient de le dire, le retour à l'énoncé pendant le processus est très faible quoi que soit la forme du problème. Comme certaines informations utilisées lors de la démonstration n'ont pas été codées mais toutes les informations utilisées ont été démontrées, l'hypothèse 3 n'est pas vérifiée.
Le codage semble exercer deux fonctions différentes chez les élèves: la fonction de mémoire et la fonction de mémoire sélective. Le codage a une fonction de mémoire sélective lorsque les seules relations codées sont celles utiles pour le processus de démonstration (par exemple, on ne code pas OB=OE). Au contraire, le codage a la simple fonction de mémoire lorsque toutes les relations recueillies sont codées. Les deux fonctions du codage s'adaptent bien aux modèles d'action que nous avons reconnus dans les protocoles (cf. paragraphe1.4 Chapitre VI) : dans le modèle Liste[2] ayant finalité de recherche, le codage est de préférence utilisé avec la fonction de mémoire, tandis que dans le modèle Liste ayant finalité de vérification et dans le modèle Final[3], le codage est de préférence utilisé avec la fonction de mémoire sélective.

Afin de présenter de façon globale les résultats à propos de la production et de l'interprétation du codage, nous proposons le Tableau 7.2 suivant

[2] Le modèle d'action *Liste* est essentiellement caractérisé par une sorte de « création d'un univers de travail » au moyen d'un recueil d'informations.
[3] Le modèle d'action *final* se développe à partir de la question du problème pour déclencher le processus de résolution.

Tableau 7.2

NOMBRE DE BINOMES	TOTAL	PROBLEME 1	PROBLEME 2	PROBLEME 3
DESSIN CONSTRUIT Modalité A	12 binômes	3 binômes	3 binômes	6 binômes
Les propriétés démontrées sont codées	12/12	3/3	3/3	6/6
Les propriétés démontrées ne sont pas codées	0/12			
DESSIN FOURNI modalité B	6 binômes	4 binômes	2 binômes	
Dessin non codé lors du processus	3/6	1/4		
Les propriétés démontrées ne sont pas codées			2/2	
Dessin codé lors du processus	3/6	3/4		
DESSIN CONSTRUIT OU DESSIN FOURNI modalité A ou B				
Propriétés non démontrées et pourtant codées	0/14			
Usage de propriétés non démontrées	1/14	1/14 (modalité A1)		

En résumé, sur tous les dessins construits, les propriétés démontrées au fur et à mesure dans le processus de résolution ont été codées[4] (10/12). Certains des dessins fournis n'ont été pas codés pendant le processus (3/6, parmi lesquels deux sont les dessins fournis au problème B2 qui a été résolu facilement par deux binômes (2/6)), les autres dessins fournis avec la liste de données à côté ont été codés lors du processus de résolution (3/6). Aucun binôme n'a codé de propriétés non démontrées et la plupart n'a pas utilisé pour la démonstration de propriétés non démontrées (exception faite pour Kévin / Jérémie). L'hypothèse 3 «les informations codées sur le dessin et aussi d'autres relations lues sur la figure sont utilisables pour la démonstration » semble être fortement remise en question. Aucune hypothèse sur les fonctions du codage avancée a priori ne semble être vérifiée. En effet, le codage utilisé par les élèves relie l'hypothèse 1 et l'hypothèse 2 faites a priori. Comme toutes les propriétés ne peuvent pas être codées facilement (par exemple deux cotées parallèles) les élèves utilisent le langage symbolique qui exerce aussi une fonction de mémoire de même que le codage sur le dessin. **Les résultats montrent que le codage sur le dessin semble exercer une fonction de**

[4] Neuf sont les binômes qui ont développé le processus de résolution dans le cadre de la théorie de la géométrie euclidienne. L'activité a engagé au total de 14 binômes dont 9 italiens et 5 français.

mémoire plus forte par rapport aux données transcrites en langage symbolique.

En conclusion, il nous semble qu'il n'y a pas une différence consistante entre la production du codage sur un dessin que l'élève a construit et l'interprétation du codage du dessin fourni comme donnée. L'évidence nous est fournie par le fait que la production du codage lors du processus de résolution (nécessaire car le codage produit ou fourni avant toute résolution est minimal) se fait dans le cas d'un dessin fourni ainsi que dans le cas d'un dessin construit par les élèves. En outre, la production du codage sur le dessin construit ainsi que l'interprétation du codage sur le dessin fourni passe par la règle de congruence entre les informations explicites de l'énoncé et le codage.

1.2 Rôle de la variable « forme dans laquelle les données sont fournies »

L'hypothèse que nous avons avancée a priori s'appuie sur l'idée que les données du problème 2 condensées dans le mot « parallélogramme » peuvent conduire les élèves davantage vers une appréhension discursive du dessin (fourni ou construit) plutôt que vers l'appréhension opératoire ou perceptive du dessin. Par contre, la forme analytique dans laquelle les données sont fournies dans les problèmes 1, peut induire davantage l'appréhension opératoire du dessin. Enfin, le problème 3 répond à l'objectif de mettre les élèves dans une situation où il faut considérer à la fois l'appréhension opératoire, l'appréhension discursive et la question du problème pour démarrer le processus de résolution.

Or, l'analyse des protocoles montre que l'hypothèse faite à propos du déroulement des processus de résolution, est validée dans les résolutions faites en géométrie synthétique (10/14 binômes), mais qu'elle n'est pas validée en géométrie analytique (4/14 binômes). Les binômes qui ont essayé de résoudre le problème 2 en géométrie analytique (Elena / Adam, Andrea / Luca), ont démarré le processus par l'appréhension opératoire et, dans un cas, au moyen de l'ajout des traits AE et OD en tant que diagonales du quadrilatère OADE. Mais, les binômes qui ont résolu le problème 2 en géométrie synthétique (Elena/Luca ; Hana /Christelle ; Luca / Alessandro) ont effectivement abordé le processus de résolution par l'appréhension discursive du dessin. Par exemple, dans l'intervention [52] du protocole de Hana /Cristelle (Problème A2)

52. H : mais parce que c'est demandé, c'est demandé dans l'énoncé..... et un parallélogramme il a toujours deux cotés opposés ou quoi? Il faut prouver que ce coté est égal à celui là et on démontre que… on va écrire ça « AD est égal à DE, <u>comme on sait déjà que DE est égal AO et que DA est égal OE comme c'est un parallélogramme</u>

Ou dans l'intervention [16] du protocole de Elena / Luca[5] (problème B2).

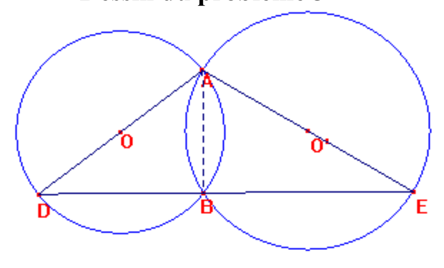
16. E: on va mettre, étant un parallélogramme, il a les côtés opposés parallèles et égaux, donc, comme il a deux côtés consécutifs égaux, il est un losange

Les binômes qui ont résolu les problèmes 1 ont démarré le processus de résolution par l'appréhension opératoire du dessin, suivie parfois de l'appréhension discursive du dessin. La plupart des binômes ont initialement isolé la sous-configuration du quadrilatère OADE. Certains d'entre eux ont isolé le seul quadrilatère OADE (Taina/Sophie ; Camille / Gaëlle), d'autres l'ont associé aux diagonales AE et OD (Olivier /Djamel ; Kévin / Jérémie), ou bien aux rayons du cercle (Vito / Davide ; Elena / Alessandra). Finalement Elena/Barbara ont isolé la sous-configuration du triangle DOE et des triangles rectangles DKE et OKE (K, point d'intersection des diagonales AE et OD. Presque tous ont fait suivre à l'appréhension opératoire du dessin, une appréhension discursive en explicitant d'autres propriétés géométriques obtenues par déduction à partir des propriétés données.
Nous pouvons donc conclure que, pour tous les binômes qui ont résolu le problème 2 en géométrie synthétique le processus de résolution démarre par l'appréhension discursive du dessin et que pour tous les binômes qui ont résolu le problème 1, le processus de résolution démarre par l'appréhension opératoire du dessin.

Nous avons observé lors de l'analyse a priori du problème 3, que la sous-configuration qu'il faut isoler pour évoquer le théorème pilote n'est pas congruent à la question (1) du problème et n'amène pas directement à l'avancement du processus. Rappelons que l'objectif du problème 3 était de placer les élèves dans une situation où il faut considérer à la fois l'appréhension opératoire, l'appréhension discursive et la question du problème pour démarrer le processus de résolution.

Les résultats montrent qu'aucun des six binômes concernés ne démarre le processus de résolution par un mécanisme énoncé. Cela signifie qu'aucun binôme n'évoque en premier le théorème utile à la résolution pour passer ensuite à la recherche des sous-configurations utiles pour prouver les hypothèses du théorème (pour passer donc à l'appréhension opératoire du dessin). Par exemple, dans

Dessin du problème 3



[5] L'intervention [16] en langue italienne est la stivante: " E: allora mettiamo qua, con un asterisco, che essendo parallelogramma ha i due lati opposti paralleli e congruenti, quindi siccome i due lati consecutivi sono congruenti è un rombo"

l’extrait suivant issu du processus de Camille et Gaëlle, nous reconnaissons la tentative de la part de Camille de mener le processus de résolution sur la base d’un modèle d’action final. Le modèle Liste remplace tout de suite le modèle final pour l’avancement du processus de résolution.

26 C: <u>pour prouver que c'est</u>..... ha, là là 27 G: attend, parce que regarde, ils ont la même... 28 C: ça c'est un rayon 29 G: ça on peut dire que c'est égal à ça, voilà. 30 Ob: AO égal OD 31 C: DO égal OA et AO' égal O' E, .. parce que 32 G: parce que c'est des rayons 33 G: ensuite, ça c'est quoi? AB *elle trace AB* 34 C: ben en suite, attends,... tu fais comme ça, on ne sait pas si tu vas toujours t'en servir, mais là déjà c'est perpendiculaire (*et tout de suit, avec enthousiasme)* ah, mais oui! Mais oui, c'est tout simple! Mais oui parce que ça c'est perpendiculaire, tu sais par rapport à la démonstration ... un... attends... un point du cercle qui rejoint les deux extrémités d'un diamètre on obtient un triangle rectangle Donc on fait ça dans le cercle C, et après on fait pareil dans l'autre cercle, après ....*il y a du bruit* .... on fait pareil dans l'autre cercle là et on a deux....., donc AB est perpendiculaire à DB et... 36 G: mais ouais! Donc voilà 37 C: et AB est perpendiculaire à BE, donc l'angle B fait 180° donc DBE est aligné

Les élèves résolvant ce problème démarrent le processus de préférence par l’appréhension opératoire du dessin. Cette appréhension opératoire s’accomplit de façon suivante :

- par l’ajout du trait AB.
  - ➢ Le segment [AB] est perceptivement perpendiculaire au segment [DE], c’est pourquoi la configuration du triangle ABE et le mot « perpendiculaire » jouent le rôle de mot et de configuration étiquette, en permettant d’évoquer le théorème « un triangle ayant le sommet sur le cercle et comme base un diamètre du cercle, est un triangle rectangle ». Ensuite l’appréhension opératoire des deux triangles rectangles DBA et ABE permet l’évocation du théorème pilote « trois points sont alignés s’ils appartiennent au même droite », équivalent à dire « l’angle DBE est 180° ». (3/6 binômes) ;
  - ➢ Le segment [AB] est perceptivement perpendiculaire au segment [DE]. Le segment [AB] assume alors le rôle de hauteur du triangle DAE. Lorsque ce triangle est partagé en les triangles DBA et ABE et lorsque ces triangles sont associés à la propriété d’être rectangles, alors le théorème pilote « trois points sont alignés s’ils appartiennent au même droite ”, équivalent à dire « l’angle DBE est 180° » est évoqué (2/6 binômes).
- par la prise en charge du triangle DAE. Cette sous-configuration ne permet pas d’évoquer un théorème utile pour montrer que les trois points B, D et E sont alignés. Ce n’est que lorsque la sous configuration est partagée dans les deux triangles DBA et ABE, que le théorème pilote

peut alors être évoqué (1/6 binômes) ;
En général, nous pouvons dire que les sous-configurations utilisées pour l'évocation et l'application du théorème (AB⊥DE ; DBA est un triangle rectangle et ABE est un triangle rectangle aussi) ne sont pas congruentes avec la question du problème et cela, favorise le modèle d'action liste plutôt que le modèle final. En effet, nous avons remarqué que la plupart des binômes mettent en acte le modèle d'action liste ayant comme but la simple recherche d'informations. Les critères de recueil d'informations ne sont pas guidés par le théorème pilote, même s'il a été évoqué à l'avance, mais passent par l'appréhension perceptive et opératoire du dessin due à la non-congruence entre la question du problème et le théorème éventuellement évoqué, comme nous l'avons prévu a priori (cf. paragraphe 4.1 du chapitre IV). L'appréhension perceptive suggère la perpendicularité entre les segments [AB] et [DE], l'appréhension opératoire permettra d'isoler les triangles DBA et ABE mais se sera l'appréhension discursive qui va relier la propriété « AB perpendiculaire à DE » avec le théorème « un triangle ayant le sommet sur le cercle et comme base un diamètre du cercle, est un triangle rectangle ». Ou encore, l'évidence perceptive semble suggérer aux élèves l'alignement des points D, B et E mais se sera au moyen de l'appréhension opératoire que le théorème « D, B et E sont alignés si l'angle DBE est égal à180° » est utilisé.

2. Perspectives didactiques

Dans ce paragraphe on déplace le point de vue de notre étude des aspects centrés sur le sujet vers les aspects liés à l'usage en classe des résultats tirés de notre recherche. Ainsi, nous essayerons de remarquer des perspectives didactiques susceptibles de rendre compte de la recherche d'un point de vue plus institutionnel.
Bien que notre recherche s'appuie sur une situation très particulière, l'analyse des protocoles nous a permis d'obtenir des résultats intéressants susceptibles de possibles implications didactiques. En particulier, nous avons reconnu un lien entre les variables prises en charge a priori pour définir les problèmes, et les fonctions du langage naturel mises en œuvre lors du processus de résolution. Sur la base de ce lien nous essayerons de développer des perspectives didactiques.

2.1 Forme dans laquelle les données sont fournies

La forme dans laquelle les données sont fournies semble avoir une incidence sur les types d'appréhensions mis en œuvre et de là sur certaines fonctions du langage naturel que les élèves usent lors des processus de résolution.

Les données fournies sous forme concentrée, comme dans les problèmes 2, semblent conduire les élèves à démarrer le processus de résolution par l'appréhension discursive du dessin en s'appuyant sur un modèle d'action Liste. La pauvreté du codage sur le dessin a obligé à avoir une appréhension discursive à l'aide du mot parallélogramme de l'énoncé. La liste d'informations ainsi recueillies permet d'évoquer le théorème pilote au moyen de la fonction d'association du langage (liste à finalité Recherche. cf. au paragraphe 1.4.1.2 du chapitre VI). C'est pourquoi nous en déduisons que la forme concentrée des données a des chances de favoriser la mise en œuvre de la fonction d'association du langage comme outil de résolution du processus.

Considérons maintenant les données fournies sous forme analytique.

Les données fournies sous cette forme, comme dans les problèmes 1, peuvent orienter les élèves vers la question du problème en démarrant le processus par un modèle final. Dans le modèle final les prémisses du théorème pilote sont re-verbalisées lors du processus en constituant l'action de guide du langage et sont prouvées par l'appréhension opératoire du dessin guidée par la verbalisation du théorème même (l'appréhension opératoire s'exerce sur le dessin avec le but de vérifier chacune des prémisses du théorème: on cherchera à isoler sur le dessin des sous-configurations utiles afin de vérifier la prémisse prise en charge). C'est pourquoi nous en déduisons que la forme analytique des données a des chances de favoriser la mise en œuvre de la fonction de guide du langage comme outil de résolution.

Un moyen à disposition des enseignantes peut donc être le recours à la forme concentrée des données pour favoriser l'appréhension discursive du dessin dont on a vu qu'elle était moins fréquente que l'appréhension opératoire du dessin.

2.2 Perspectives didactiques liées aux fonctions du langage

2.2.1 Fonction de guide dans le travail à deux

De façon générale, le travail à deux semble favoriser **l'usage du langage comme outil de résolution.** La verbalisation du théorème pilote, par exemple, semble être nécessaire pour rendre explicite au camarade le choix du théorème mais elle permet aussi d'expliciter un projet pour prouver les prémisses du théorème. Les résultats présentés au chapitre VI montrent bien que la verbalisation du théorème pilote se révèle être un outil essentiel pour la mise en place de plusieurs fonctions : la fonction de guide, la fonction de planification du langage et la fonction de contrôle, lesquelles exercent évidemment une influence décisive sur le processus de résolution des problèmes.

Les résultats présentés au chapitre VI montrent aussi des implications didactiques directement liées au fait de travailler à deux. En effet la fonction de guide du langage dépend du degré de difficulté du problème et du profil du binôme. Dans le processus de résolution d'un problème jugé difficile par les élèves, la fonction de guide sera d'autant plus forte que les théorèmes verbalisés seront plus difficiles pour les élèves : la nécessité ressentie par les élèves de re-verbaliser au cours du processus les prémisses de l'énoncé du théorème constituera un guide et permettra de définir un projet de résolution. Mais nous avons observé aussi que, la fonction de guide (en tant que reformulation des prémisses manquantes du théorème à vérifier), ne s'exerce jamais pour l'élève qui verbalise le théorème utile à la résolution mais pour son partenaire, sauf dans le cas où ce partenaire n'arrive pas à se servir de la verbalisation du théorème : l'élève qui a formulé le théorème est alors mené à guider lui-même le processus de résolution au moyen de la re-verbalisation des prémisses du théorème (cf. paragraphe 6.4). Donc, le travail à deux et particulièrement le profil du binôme, influe directement sur le rôle du langage comme outil de résolution et donc sur le processus de résolution.

Le travail à deux semble donc amplifier la fonction de guide du langage et du coup permettre à un binôme d'élèves de réussir à résoudre le problème, là où un élève seul n'y serait pas nécessairement arrivé. Il y a là une autre possibilité à disposition des enseignants pour permettre à des élèves moins à l'aise d'être confrontés à la recherche de problèmes un peu plus complexes qu'ils ne pourraient aborder seuls. L'enseignant peut faire travailler en binôme deux élèves de niveau inégal (à condition que la différence de niveau ne soit pas trop importante) à la recherche d'un problème. On reconnaît ici la zone de proche développement (Vygotsky, 1938, Pensée et Langage, chapitre 6) et le rôle crucial qu'y joue le langage. L'intérêt de favoriser la fonction de guide du langage entre pairs (et non entre enseignant et un élève) réside dans l'évitement d'effets de contrat dû aux positions dissymétriques de l'élève et de l'enseignant dans la relation didactique.

2.2.2 Fonction d'association liée à la forme dans laquelle le problème est proposé

La forme dans laquelle le problème est proposé (énoncé seul ou alors Liste de données accompagnée d'un dessin) exerce une influence sur l'appréhension opératoire et discursive du dessin. Cela influe à son tour sur les informations recueillies et donc sur les mots et les configurations qui peuvent jouer le rôle d'étiquette pour évoquer le théorème pilote. Le lien entre la configuration étiquette et le théorème pilote est fortement conditionné par le système de connaissances des élèves et, en particulier, par le curriculum des élèves[6] (voir à ce propos

[6] Par exemple, le problème 1 peut être résolu à l'aide du théorème [1] « un quadrilatère ayant quatre côtés égaux

le paragraphe 1.5 du chapitre VI)

Inversement, les différents curriculums amènent les élèves à une appréhension opératoire du dessin différente. En effet, les élèves cherchent à isoler dans le dessin des sous-configurations associées aux théorèmes relevant de leur curriculum. Ces sous-configurations sont susceptibles de jouer un rôle d'étiquette et de permettre l'évocation d'un théorème pilote appartenant au curriculum scolaire. À ce propos, le Tableau 6.4 au chapitre VI, présente le pourcentage des élèves français et des élèves italiens qui ont évoqué certains théorèmes et le pourcentage total des binômes qui ont évoqué chacun des théorèmes pris en charge pour la résolution des problèmes proposés. Ce tableau montre l'existence de théorèmes pilote préférés par les élèves de l'un des pays, soit parce qu'il joue un rôle important dans l'enseignement, soit parce qu'il est l'application moins coûteuse en raison de l'existence d'autres théorèmes du curriculum.

Il apparaît clairement que les processus de résolution des élèves ne relèvent pas simplement d'un engagement cognitif mais doivent être replacés dans le contexte institutionnel dans lesquels ils prennent place.

3. Conclusion

Il semble que la forme du problème n'ait pas joué un rôle déterminant sur le processus de résolution. L'appréhension opératoire du dessin s'est avérée dominante par rapport à l'appréhension discursive lors du processus de résolution d'un problème de géométrie plane quelle que soit la forme du problème. L'appréhension discursive du dessin semble alors ne pas être spontanément utilisée pour aborder le processus de résolution.

Le problème 2 a été proposé dans ce but car pour démarrer le problème l'appréhension discursive du dessin est nécessaire et l'expérimentation a montré que c'est dans ce seul cas que les élèves utilisent l'appréhension discursive du dessin pour aborder le problème.

Il semble en revanche que la forme concentrée des données puisse exercer une influence sur l'appréhension discursive du dessin. L'appréhension opératoire et discursive du dessin semblent s'exercer conjointement lorsque la question du problème n'est pas congruente avec

---

est un losange » en isolant la sous-configuration du seul quadrilatère OADE, ou bien à l'aide du théorème [2] « un quadrilatère ayant les diagonales perpendiculaires qui se coupent en leur milieu est un losange » en isolant la sous-configuration du quadrilatère ayant les diagonales tracées. Or, si en Italie le théorème [1] comme le théorème [2] sont utilisés pour la résolution du problème 1, en France l'application du théorème [2] est moins « coûteuse ». Comme dans le curriculum scolaire italien, les critères d'isométrie des triangles sont habituellement utilisés, le coût à prouver les hypothèses du théorème [1] est presque équivalent au coût à prouver les hypothèses du théorème [2] tandis qu'en France, l'application du théorème [1] sur la base de la géométrie des transformations est beaucoup plus coûteuse.

les sous-configurations comme le montrent les processus de résolution du problème 3. Il y a là un outre levier à destination des enseignants pour favoriser un jeu conjoint de deux types d'appréhension dans la résolution d'un problème de démonstration en géométrie plane : la non-congruence entre question du problème et théorème outil pour répondre a favorisé les deux appréhensions.

Enfin, nous proposons de transformer les trois hypothèses sur le codage avancées a priori en l'hypothèse suivante qui a été vérifiée : les informations utilisables dans le processus de résolutions sont toutes les informations démontrées et seulement celles-là elles sont codifiées sur le dessin lorsqu'il est possible.

Conclusion

Nous avons choisi d'analyser l'échange communicatif entre les élèves en train de résoudre un problème de géométrie plane dans un cadre théorique (cf. Chapitres I et II) issu de la psycho-linguistique, de la didactique et, partiellement, de la psychologie sociale. Dans ce cadre nous avons pris en compte :

- les objets définissant le paramètre « notion » du discours (référent, signifiant ou signifié) issus de la didactique
- les paramètres définissant l'espace de l'acte de production (locuteur, interlocuteur et espace-temps) et l'espace de l'interaction sociale (lieu social, destinataire, énonciateur et but), issus de la psycho-linguistique
- une liste d'unités linguistiques permettant de reconnaître le type de discours, issue de la psycho-linguistique
- les notions de « fonction du langage » et de « fonction discursive » issues de la psychologie sociale et de la didactique.

Au sein de ce cadre théorique, nous avons ajouté une hypothèse cruciale concernant le rôle fonctionnel du langage naturel : le langage naturel peut jouer le rôle d'outil lors de la résolution d'un problème de démonstration en géométrie plane. En outre, comme le processus de résolution d'un problème de géométrie plane, fait appel en permanence aux relations entre les appréhensions du dessin (su sens de Duval) et les référents théoriques appartenant à une certaine théorie (par exemple la géométrie euclidienne ou la géométrie analytique), nous avons essayé de préciser en quoi consiste le rôle du langage naturel dans l'établissement et le fonctionnement de ces relations

Pour développer notre étude nous nous sommes appuyés sur deux modèles d'analyse que nous avons mis au point : le modèle « démarche de résolution et diversions » et le modèle « Mécanismes » (mécanisme dessin et mécanisme énoncé).

Le modèle « démarche de résolution et diversions » permet de segmenter le processus de résolution des élèves en unités de base (question, réponse) et d'une part permet de dégager les questions intermédiaires que se posent les élèves, d'autre part indique dans quelle mesure ils y ont répondu. Le modèle « Mécanismes » permet d'analyser comment les élèves aboutissent aux réponses des questions qu'ils se posent. Ce modèle permet de répondre à la question suivante : quelles sont les valeurs des propositions énoncées (épistémique ou logique) par les élèves et quels sont les modes d'expansion discursive (accumulation ou substitution) ?

Nous avons bien montré que c'est lors des changements des valeurs des propositions que se produit l'avancement dans la résolution du problème. L'analyse montre que le langage peut jouer le rôle déclencheur dans le changement de la valeur des propositions : la verbalisation d'un théorème (pilote) permet de confronter l'ensemble des hypothèses du théorème verbalisé avec la liste des informations recueillies par les élèves à partir du dessin. Ne sont retenues que les informations susceptibles d'être hypothèses. Conjointement à cette opération de sélection, les informations changent de statut. Elles prennent un statut opératoire par rapport au pas de déduction.

Dans certains protocoles, l'analyse a permis de repérer la verbalisation de certains théorèmes en acte non verbalisés dans d'autres circonstances. Nous avons alors constaté que bien souvent il s'agit de ce que nous avons appelé un théorème pilote, c'est-à-dire un théorème relatif au dernier pas de déduction aboutissant à la réponse finale et qui permet ainsi de définir un projet d'une suite de pas de déduction permettant de passer des données à la réponse finale. Il est donc apparu dans l'analyse des protocoles que les élèves ressentent la nécessité de

verbaliser l'énoncé du théorème pilote. On peut y voir un exemple de l'aide apportée par la verbalisation dans la planification de l'action que mentionne Vygotski (cf. chapitre 1).

<u>Fonctions du langage naturel</u>

Nous avions postulé a priori que principalement deux fonctions du langage jouent un rôle important dans l'avancée de la résolution : la fonction de guide et la fonction d'association. Notre étude a mis en évidence comment ces fonctions s'exercent de façon fine, et a aussi permis de dégager d'autres fonctions qui s'exercent lors du processus: la fonction de planification et la fonction de contrôle

La **fonction d'association** du langage permet de dépasser le simple recueil d'informations pour déboucher sur la verbalisation de l'énoncé d'un théorème (pilote). Cela passe par l'action conjointe d'un mot et d'une configuration étiquette. En effet, nous avons montré que dans la plupart des protocoles, l'évocation des théorèmes, surtout pour les théorèmes pilote, passe par certains mots conjointement à certaines configurations. Csont mots et ces configurations jouent en quelque sorte le rôle d'étiquette. Les mots et les configurations étiquette évoquent ainsi des référents théoriques et ce renvoi au référent théorique peut être interprété dans la définition d'un concept de Vergnaud comme le passage des signifiants attachés au concept (représentations langagières et non langagières) au référent théorique interprété dans la définition de Vergnaud comme le signifié attaché au concept.

La **fonction de guide** du langage, passe par la verbalisation de l'énoncé du théorème pilote et s'exerce par la re-verbalisation, pendant le processus, de chaque prémisse encore à prouver de l'énoncé du théorème. Cela permet de ne pas perdre le fil de la démonstration car doivent être prouvées toutes les prémisses de l'énoncé verbalisé et seulement celles-là. Nous avons en outre montré que le changement de la valeur des propositions énoncées conjointement à la fonction de guide aident l'avancement du processus et créent les conditions pour qu'une fonction de planification s'exerce.

La **fonction de planification** permet de construire un plan de pas de déduction nécessaire pour prouver chaque prémisse du théorème pilote dont l'énoncé a été auparavant verbalisé. Notre étude permet de mettre en évidence le jeu **subtil entre la fonction de guide et la fonction de planification** du langage lors d'un processus de démonstration. En effet, l'analyse des protocoles relève d'exemples de guide sans planification (par exemple, lorsqu'il faut prouver la prémisse « les diagonales sont perpendiculaires » dans la modalité 1 du problème), mais en revanche nous n'avons pas remarqué d' exemples de planification sans guide. Cela signifie que la fonction de planification s'exerce grâce à la fonction de guide.

L'efficacité de la fonction de guide sur le processus de résolution dépend du profil du binôme, c'est-à-dire de la position d'équilibre ou de déséquilibre des élèves. Par exemple, la verbalisation de l'énoncé du théorème pilote de la part de l'élève « fort » agit comme guide pour le partenaire plus « faible ». La fonction de guide exercée par l'élève fort permet de mettre en évidence chaque prémisse à vérifier, mais il se peut que l'élève plus « faible » ne soit pas capable de planifier les pas de déduction nécessaires à la vérifier. Dans ce cas, l'élève fort guide, mais l'élève faible n'est pas capable, à partir de là, de planifier (cf. paragraphe 4 du chapitre VI). Nous avons remarqué aussi des cas où l'élève « faible » est capable de planifier les pas de déduction nécessaires pour prouver les prémisses re-verbalisées par le camarade pendant le processus. Nous avons pu mettre en évidence que la fonction du langage est toujours adressée à l'élève le plus « faible » afin qu'il ne perde pas le fil du processus de démonstration.

Nous avons en outre mis en évidence la correspondance entre les fonctions et le changement du mode d'expansion discursive (d'une simple accumulation à des pas de substitution). La verbalisation de l'énoncé du théorème pilote joue aussi un rôle à la fin du processus de résolution par la fonction de contrôle du langage. Elle s'exerce grâce au retour sur le processus de résolution et sert à vérifier que toutes les hypothèses du théorème pilote ont été prouvées.

Les fonctions du langage en tant qu'outils de résolution des problèmes de géométrie plane agissent de façon liée. En effet, la fonction de planification du langage n'a pas les moyens de s'exercer sans la fonction de guide du langage car il n'est pas possible de planifier les actions de vérification de chaque prémisse du théorème pilote s'il n'est pas verbalisé à l'avance.

La fonction de contrôle est aussi liée à la fonction de guide car elle se réalise grâce au retours sur les pas de déduction du processus et elle est identifiable par la présence de la verbalisation de l'énoncé du même théorème à la fin de la résolution. Enfin, la fonction d'association du langage et la fonction référentielle sont liées. Les objets (mots et configurations) désignés par la fonction référentielle du langage comme objets géométriques participant d'un énoncé d'un théorème, peuvent jouer le rôle de mots et configurations étiquette agissant dans la fonction d'association du langage.

En outre, nous avons montré que le degré d'importance de ces fonctions, c'est-à-dire l'action forte ou faible des fonctions lors du processus de résolution, dépend du degré de difficulté du problème et du profil du binôme (cf. Paragraphe 4, Chapitre VI). Par exemple, nous avons montré que l'action de la fonction de guide prend plus d'importance quand le degré de difficulté du problème augmente. Nous avons montré en outre que la fonction de guide peut s'exercer de deux façons différentes par rapport au profil du binôme :

- Lorsque les élèves sont en position de déséquilibre, l'un forte et l'autre faible, il se peut que la verbalisation de l'énoncé du théorème pilote faite par l'élève fort, exerce une fonction de guide pour l'élève faible. Il se présente alors deux cas possibles : soit c'est l'élève fort qui utilise la verbalisation du théorème comme guide pour aider l'élève faible, soit c'est l'élève faible qui utilise la verbalisation du théorème faite par le partenaire plus fort, comme guide pour soi-même.
- Lorsque les élèves sont en position d'équilibre la verbalisation d'un théorème pilote que chacun propose, fonctionne comme guide pour chaque élève. Nous avons montré aussi que dans le cas où les deux élèves sont « faibles » car ils n'arrivent pas verbaliser

l'énoncé d'un théorème pilote, l'action de guide exercé par l'observateur au moyen d'une question indirecte (il remet en jeu la question du problème) a pu déclencher un processus de résolution.

<u>Modèles d'action</u>

Outre les résultats concernant l'analyse fonctionnelle du langage et la caractérisation de certaines fonctions du langage, d'autres résultats ne portant pas sur des questions posées a priori, ont aussi été obtenues. L'analyse des modes de progression du discours dans la résolution a mis en évidence certaines régularités dans les comportements verbaux des élèves (entre binômes), régularités que nous avons qualifiées de « modèles d'actions ». On a ainsi distingué trois modèles d'action : un modèle liste, un modèle final et hypothético-déductif. Nous avons pu repérer qu'est attaché à chaque modèle un mode d'expansion discursive spécifique : de façon, privilégiée, l'accumulation pour la Liste et la substitution pour le modèle final et pour le modèle hypothético-déductif. Ainsi nous avons pu vérifier la validité de l'hypothèse de recherche 3 avancée lors de la problématique de recherche (cf. Chapitre III) : l'avancement dans la résolution d'un problème se réalise par une progression dans les modes d'expansion discursive : le sujet passe d'un mode d'expansion discursive simple comme l'accumulation, au mode d'expansion discursive plus complet comme la substitution. Cette évolution passe par le changement de la valeur des propositions : d'une valeur liée au contenu de la proposition, à une valeur liée au statut de la proposition.

À l'issue de ce travail, revenons à notre question initiale des allers et retours entre dessin et référent théorique qui fait l'objet de l'hypothèse de recherche 1. Notre travail apporte deux types de réponses :

- A un niveau plus global, le processus de résolution d'un problème semble se faire selon deux démarches différentes en alternance :
  - l'une correspondant au modèle d'action liste plutôt attaché à l'appréhension du dessin
  - l'autre correspondant au modèle d'action final plutôt attaché au référent théorique.

Cette alternance de deux démarches s'est avérée vérifiée presque chez tous les binômes (excepté un binôme qui a résolu immédiatement le problème de modalité 2 et un binôme qui a eu un blocage sur le modèle liste) et on peut penser que dès qu'un problème de géométrie est un peu complexe, il doit se mettre en place une telle alternance pour assurer la réussite au problème.

Nous avons reconnu dans la plupart des protocoles la conjonction de cette alternance et de la réussite au problème. Il est loisible de supposer que le travail à deux a facilité l'alternance. A contrario, on peut imaginer un blocage sur un des modèles d'action dans le cas d'un travail individuel. Dans ce cas, l'intention de l'enseignant pourrait consister à pousser l'élève vers l'autre modèle d'action.

Cependant, dans un protocole il ne s'est pas produit d'alternance entre les deux modèles d'action et cela a été source de blocage : les élèves ont recueilli une liste très riche d'informations mais n'ont pas débouché sur un processus de démonstration. Lorsque l'observateur a poussé les élèves vers l'autre modèle d'action (il a remis en jeu la question du problème), ces derniers sont arrivés à déboucher sur un enchaînement de pas de déduction. Là encore, l'intervention de l'enseignant consiste à pousser les élèves vers l'autre modèle d'action.

- A un niveau local d'analyse des allers et retours entre dessin et référent théorique, il est apparu que le langage joue un rôle fondamental de par différentes fonctions :

du dessin vers le référent théorique (« dessin → référent théorique ») : par la fonction d'association du langage ; du référent théorique au dessin (« référent théorique → dessin »), c'est-à-dire de la verbalisation du référent théorique à l'appréhension opératoire du dessin : par la fonction de guide du langage.

Ces fonctions s'exercent de façon liée et il ressort que l'ensemble du processus de résolution apparaît alors au niveau local comme un ensemble complexe donnant lieu à des multiples articulations entre verbalisations et appréhensions du dessin.

La dimension internationale (l'expérimentation a été menée dans deux pays) a permis de montrer le rôle joué par la dimension institutionnelle dans le processus de résolution. Nous avons montré comment la théorie de référence, et donc les programmes scolaires, exercent de l'influence sur le processus de résolution des problèmes. Cette mis en évidence a été rendue possible grâce à la confrontation de deux expérimentations, l'une conduite en Italie et l'autre en France où la géométrie enseignée n'est pas la même (la géométrie euclidienne en Italie, la géométrie des transformations en France). Nous avons donc montré que les rapports institutionnels aux savoirs influent sur le processus de résolution par l'action différente des mots et des configurations étiquette. Les mots ou les configurations jouent le rôle d'étiquette à la fois en Italie et en France mais, parfois, en évoquant des théorèmes différents et cela peut changer la difficulté du problème (lorsque, par exemple, il est difficile de prouver les hypothèses du théorème évoqué Cf. paragraphe 1.1.6.5 du Chapitre VI). La notion de « théorème » que nous avons adopté, issue de la théorie de Mariotti (cf. Chapitre I), conforte ce résultat : l'évocation de théorèmes différents en Italie ou en France ne signifie pas seulement l'évocation d'un énoncé différent mais aussi d'une théorie de référence différente.

En conclusion, notre travail fournit un nouvel exemple à la théorie vygotskyenne, selon laquelle le langage naturel n'est pas simplement une expression du système de connaissances de l'élève, mais qu'il se noue une dialectique fondamentale entre la pensée et la parole en termes de ressources mutuelles (voir les fonctions décrites ci-dessus).

Cependant, c'est le recours à des concepts développés plus spécifiquement en didactique de la géométrie, en particulier sur les notions de figure ou de démonstration, qui a permis d'analyser de façon fine le rôle du langage dans le cas de la situation particulière de la démonstration en géométrie. L'articulation de cadres théoriques issus de différents horizons s'est avérée très fructueuse.

Bibliographie et références.

Bakhtine M. (1968), *Dostoevskji : poetica e stilistica*, Piccola Biblioteca Einaudi

Beaudichon J. (1999) *La communicatin., Processus, formes et applications*. Paris : Armand Colin/HER

Beaudichon J., Ducroux N. (1985) L'approche du controle cognitif de la communication chez l'enfant : quelques donnèes, quelques problèmes. In Bideaud J., Richelle M. (Eds.), *Psychologie développementale, problèmes et réalités,* Bruxelles, Mardaga, 1985 , pp. 139-159.

Benveniste E. (1974) *Problèmes de linguistique général, 2*. Paris : Gallimard

Bessot D. (1983) "Problèmes de représentation de l'espace", *Enseignement de la géométrie*, Bullettin Inter-Irem N° 23, pp. 33-40

Boero P., Garuti R., Pedemonte B., Robotti E. (1997): Approaching theoretical knowledge through voices and echoes: a Vygotskian perspective *Proceedings of the 21th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education P.M.E-21*, Erkki Pehkonen (ed.), University of Helsinki, Lahti, Finland; vol. 2, 81-88

Bronckart J.P. (1985) *Le fonctionnement des discours*. Paris : Delachaux et Niestlé

Chevallard Y. (1995) « La fonction professorale :esquisse d'un modèle didactique » *Actes de la VIIIème école d'été de didactique des mathématiques*, pp. 83 – 121

Destainville (1995): Transformation et configuration du collège à la seconde. In *Bulletin Inter-IREM, Liaison Collège-seconde 1989, 1990*.

Douady R., (1986) Jeux de cadres et dialectique outil-objet. In *Recherche en Didactiques des Mathématiques,* Vol. 7, n°2, pp.5-31.

Duval R. (1988) Pour un approche cognitive des problèmes de géométrie en termes de congruence, *Annales de Didactique et e Sciences Cognitives,*1, pp.57-74.

Duval R. (1993) : « Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée », In Annales de Didactique et de Sciences Cognitives, IREM de Strasbourg, 5, pp. 37-65.

Duval R (1994) « Les différents fonctionnements d'une figure dans une démarche géométrique » , In *Repères – IREM*, 17, pp. 121-137.

Duval R. (1995) *Sémiosis et pensée humaine*. Paris : Peter Lang S.A.

Duval R. (1998) « Geometry from a cognitive point of view » In C. Mamonara and V. Villani (Eds.), *"Perspective on the teaching of geometry"* ICMI Study.

Duval R. (2000) “Basic Issues for Research Mathematics Education” In Proceeding *PME-24 Proceeding* , Vol.1, pp. 55 - 69

Farago F. (1999) *Le langage*. Collection Cursus – Philosophie. Paris : Armand Colin.

Fischbein E. (1975). *The Intuitive Sources of Probabilistic Thinking in Children*. Dordrecht : D. Reidel Publishing Company.

Fischbein E. (1987) *Intuition in science and mathematics. An education approach.* Dordrecht : D.Reidel Publishing Company.

Fischbein E. (1993) The Theory of Figural Concepts. In *Educational Studies in Mathematics,* 24, pp. 139-162.

Giorgiutti I., Hilt D., Houdebine J., Juhel M.A., Julo J.,. Mouraud G (1998) *La démonstration, écrire des mathématiques au collège et au lycée.* Paris : Hachette Education.

Grize J. B. (1983) *Schématisation et logique naturelle*. In Borel, Grize et Miéville (Eds.), Essai de logique naturelle (pp. 99-145) Berne : Peter Lang

Jakobson R. (1963) *Essais de linguistique général.* Paris : Minuit.

Laborde C. (1992) Deux usages complémentaires de la dimension sociale dans les situations d’apprentissage en mathématiques, *Auprès Vygotsky, à Piaget*

Laborde C. (1982) *Langue naturelle et écriture symbolique*. Thèse de Doctorat. Grenoble : Université scientifique et Médicale Institut National Polytechnique de Grenoble

Laborde C. (1994). Enseigner la géométrie : permanences et révolutions. In *Bulletin APMEP*, 396, 523-548.

Laborde C.& Capponi B. (1994) Cabri-géomètre constituant d’un milieu pour l’apprentissage de la notion de figure géométrique. In *Recherche en Didactiques des Mathématiques,* Vol. 14, n°12, pp. 165-210.

Laborde C. (1999) “Dynamic geometry software as a window on mathematical learning : empirical research on the use of Cabri-geometry”. In Proceedings of the Second Mediterranean Conference on Mathematics Education A. Gagatsis, G. Makrides (eds.), Nicosia : Cyprus: Cyprus Mathematical Society, Vol.I pp.142-160

Mariotti M. A (1991) Age variant and invariant elements in the solution of unfolding problems. In Furinghetti F. (ed) Proceeding of PME XV (Vol. II, pp. 389-396). Assisi, Italie.

Mariotti M. A. (1995) Images and Concepts in Geometrical Reasoning in *Exploiting Mental Imagery with Computers in Mathematics Education*, Sutherland R. and Mason J. (pp. 97-116) NATO ASI Series, Berlin, Heidelberg: Springer Verlag.

Mariotti M. A. (1997) "Approaching geometry theorems in contexts: from history and epistemology to cognition" Proceeding of the 21st Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education. University of Helsinki.Ed: Erkki Pehkonen , Vol. 1, pp. 180-195

Mariotti M. A. (1998) Construction en Géométrie, quelques considérations. In *Actes du séminaire « Construction en Géométrie, quelques considérations »,* Grenoble : équipe EIAH, Laboratoire Leibniz.

Mesquita A. (1989a) Sur une situation d'éveil à la déduction en géométrie. In *Educational Studies in Mathematics,* 20, pp. 95-109

Mesquita A. (1989b) *L'influence des aspects figuratifs dans l'argumentation des élèves en géométrie : éléments pour une typologie.* Thèse de l'Université Luis Pasteur, Strasbourg, Publication de l'Institut de Recherche Mathématique avancée.

Parzysz B. (1988) "« Knowing » vs. « seeing » problems of the plane representation of space geometry figures". In *Educational Studies in Mathematics* Vol. 19, pp. 79-92.

Robert A. (1998) Outils d'analyse des contenus mathématiques à enseigner au lycée et à l'université. In *Recherche en Didactiques des Mathématiques,* 18/2, 139-190

Robotti E. (2001): Verbalization as a mediator between figural and theoretical aspects *Proc. of the 25th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education PME-25*, Editors: van den Heuvel-Panhuizen M., Utrecht (Olanda); vol. 4, p. 105-112

Proceedings of the Second Conference of the European Society for Research in Mathematics Education CERME 2, Mariánské Lázne, Czech Republic

Actes de EM2000. Grenoble, 2000.

http://em2000.imag.fr/Actes/Ateliers/Ateliers.pdf

Schubauer Leoni (1986) Le contrat didactique un cadre interprétatif pour comprendre le savoirs manifestes par les élèves en mathématique. In *Journal européen de psychologie de l'éducation*

Van Dijk T.A. (1980) *Testo e contesto*. Milano: Il Mulino

Vergnaud G. (1991) la théorie des champs conceptuels. In *Recherche en Didactiques des Mathématiques* Vol. 10, n° 23, pp. 133-170.

Vygotski L. (1938) *Pensée et Langage*. 3e édition (1997) Paris : La Dispute.